Hochschule der Medien Stuttgart
Fakultät Electronic Media
Bachelorarbeit im Studiengang Audiovisuelle Medien

Die Herleitung, Umsetzung und Veranschaulichung von mikrotonalen Stimmsystemen

vorgelegt von
Fabian Süberkrüb
Matrikelnr.: 38168

zum 16.07.2024
an der Hochschule der Medien Stuttgart
zur Erlangung des akademischen Grades eines Bachelor of Engineering

Erstprüfer: Prof. Oliver Curdt
Zweitprüfer: Prof. Dr.-Ing. Gunter Hübner

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit versichere ich, Fabian Süberkrüb, ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit mit dem Titel: „Die Herleitung, Umsetzung und Veranschaulichung von mikrotonalen Stimmsystemen" selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Die Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen wurden, sind in jedem Fall unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht. Ebenso sind alle Stellen, die mit Hilfe eines KI-basierten Schreibwerkzeugs erstellt oder überarbeitet wurden, kenntlich gemacht. Die Arbeit ist noch nicht veröffentlicht oder in anderer Form als Prüfungsleistung vorgelegt worden.

Ich habe die Bedeutung der ehrenwörtlichen Versicherung und die prüfungsrechtlichen Folgen (§ 24 Abs. 2 Bachelor-SPO, § 23 Abs. 2 Master-SPO (Vollzeit)) einer unrichtigen oder unvollständigen ehrenwörtlichen Versicherung zur Kenntnis genommen.

Stuttgart, 16.07.2024

Fabian Süberkrüb

Kurzfassung

Diese Arbeit gibt einen Überblick über die Methoden zur Herleitung, Berechnung und Umsetzung von mikrotonaler Musik. Zunächst werden Grundprinzipen, die für jede Art der Harmonik wichtig sind, dargestellt. Anschließend werden darauf aufbauend drei verschiedene mikrotonale Skalen in ihren Charakteristika erläutert und Möglichkeiten zur Notation dargestellt.
In den folgenden Kapiteln werden diese Skalen berechnet und zum Teil auch in einer DAW umgesetzt. Abschließend werden die mikrotonalen Skalen anhand von Hörbeispielen demonstriert.

Abstract

This thesis provides an overview of the methods used to derive, calculate and implement microtonal music. First, the basic principles that are important for every type of harmony are presented. Building on this, 3 different microtonal scales are explained in their characteristics. Possibilities for notation are presented. In the following chapters, these scales are calculated and some of them are also implemented in a DAW. Finally, the microtonal scales are demonstrated using audio examples.

Inhalt

Einleitung

Die meisten Menschen mit durch westliche Musik geprägten Hörerfahrungen haben eher wenig Berührungspunkte mit Mikrotonalität.
Dennoch wird man auf der Suche nach Beispielen für Mikrotonalität in westlicher Musik schnell fündig. Dazu zählen nicht nur vierteltöniger Jazz, oder die mikrotonalen Modulationen und rein gestimmten Harmonien von Jacob Collier. Auch ein Bending im Blues oder ein Slide der Stimme sind mikrotonal. Auch in populärer Musik in den Charts findet sich Mikrotonalität. Im Outro von „The Real Slim Shady" findet sich ein mikrotonales Ostinato (min 3:49) (Eminem, 2013).

In den oben genannten Beispielen ist die Mikrotonalität eine Ergänzung zu sich hauptsächlich in gleichstufig gestimmten Harmonien bewegenden Klängen. Wege zur Umsetzung solcher Beispiele bilden einen kleinen Teil dieser Arbeit.
Es gibt jedoch auch einen großen Fundus aus mikrotonaler Musik, die die Unterteilung der Oktave in 12 Töne teilweise oder auch komplett verlässt. Auf den Stimmsystemen dieser Skalen soll der Fokus dieser Arbeit liegen. Sie befasst sich mit der Herleitung und Umsetzung dieser mikrotonalen Skalen und demonstriert sie anhand ihres Klangs und ihrer Anwendungsmöglichkeiten.
Diese Arbeit soll eine generelle Einführung in die Welt der Mikrotonalität geben. Daher werden die wichtigsten Konzepte, die zum Verständnis der mikrotonalen Skalen notwendig sind, an entsprechender Stelle ebenfalls erläutert.

Begriffsdefinition

Intervall:	Der Abstand zweier Töne zueinander. Darstellbar als Verhältnis und als Frequenzdifferenz in Hertz (meistens umgerechnet in Cent).
Cent:	Maß zur feinen Unterscheidung von Tonhöhen. Berechnet aus zwei Frequenzen mit der Formel: $1200 \times \log 2\ (\frac{F1}{F2})$
Konsonanz/Dissonanz	Konsonant: Gleich bzw. rein klingend. In der Regel einfache Schwingungsverhältnisse Dissonant: Gegeneinander schwingend.
Reines Intervall	In der westlichen Harmonielehre: Rein als Attribut bestimmter Intervalle. Z.B. reine Quinte im Gegensatz zur verminderten Quinte In dieser Arbeit: Ein Intervall mit dem Verhältnis der von der Obertonreihe abgeleiteten Schwingungsverhältnisse.
EDO	Abkürzung für: Equal Division of the Octave. Bezeichnet Skalen, die die Oktave in gleich große Frequenzabschnitte unterteilen.
Enharmonische Verwechslung	Bezeichnung für den Umstand, dass ein Ton mit der gleichen Tonhöhe von unterschiedlichen Noten repräsentiert sein kann. Z.B entspricht die Tonhöhe von C# (in der gleichstufigen Stimmung) der Höhe von Db.
Xenharmonik	Von Ivor Darreg geprägter Begriff. Alternativbezeichnung für mikrotonale Harmonik bzw. mikrotonale Musik.
Gleichstufige Stimmung	Grundsätzlich: Stimmsystem, dass eine Oktave (oder ein anderes Intervall) in gleich große Abschnitte unterteilt. In der Regel gebräuchlich für die 12-tönige Unterteilung der Oktave.
Pythagoreisches Komma	Bezeichnung für die Abweichung des Starttons vom End-Ton, bei der Verkettung von Quinten.
Pitch-Class	System zur Betrachtung von Tönen unabhängig von deren Oktavierung.

Kapitel 1: Einführung und Überblick

Um mikrotonale Musik und ihre verschiedenen Erscheinungsformen von nicht mikrotonaler Musik unterscheiden und abgrenzen zu können und die Möglichkeiten der von Mikrotonalität zu verstehen, müssen zunächst einige Grundprinzipien dargestellt werden.

1. Die Obertonreihe und Frequenzverhältnisse

Die Wahrnehmung von Harmonie in der Musik wird maßgeblich durch Obertöne beeinflusst. Nahezu jeder Klang in der Musik besteht aus einer Grundschwingung und darüberliegenden Teilschwingungen. Eine solche (ganzzahlige) Teilschwingung wird als Oberton oder Partialton bezeichnet (Partch, 1979, S.72). Werden die verschiedenen Teilschwingungen einer Grundschwingung von links nach rechts aufsteigend nach ihrer Frequenz organisiert, erhält man die Obertonreihe. Je näher ein Partialton in dieser Obertonreihe an der Grundschwingung liegt, desto konsonanter wird das ihm zugeordnete Intervall wahrgenommen. So ist die Oktave die erste Teilschwingung, gefolgt von der Quinte. Beides sind konsonante Intervalle. Geht man die nachfolgenden Stellen durch, werden die Intervalle nach und nach dissonanter. (Persichetti, 1961, S. 23-25). Wichtig ist hierbei jedoch, dass die Intervalle der - in der westlichen Musik überwiegend verwendeten - gleichstufigen Stimmung maßgeblich von den höheren Partialschwingungen abweichen. Die Ausführungen von Persichetti beziehen sich ebenfalls auf die gleichstufige Stimmung, sind aber übertragbar. Ausführlicher wird dies im Laufe der Arbeit dargestellt.

Die Obertöne sind ganzzahlige Vielfache der Grundschwingung. Das Verhältnis eines Obertons zu seiner Grundschwingung lässt sich daher als Verhältnis zweier Zahlen darstellen. Der erste Oberton steht im Verhältnis 2/1 zur Grundschwingung. Dies entspricht der Oktave. Auf diese Art können Verhältnisse für mehrere musikalischen Intervalle ermittelt werden: 3/2 entspricht der Quinte, 4/3 der Quarte, 5/4 der großen Terz, 6/5 der kleinen Terz und 5/3 der Großen Sexte (Hindemith, 1942, S.17-19). Der Abstand zweier Töne, der dem Verhältnis eines Obertons zu seiner Grundschwingung entspricht, kann als „reines Intervall“ bezeichnet werden (es besteht kein Zusammenhang zur Benennung der zwölf Intervalle der westlichen Musiklehre, z.B. der „reinen Quinte“).

Die oben dargestellten Verhältnisse ermöglichen die Umsetzung verschiedener relativer Stimmungen. Oftmals findet sich als Beispiel dafür die Pythagoreische Stimmung. Bei dieser werden Quinten vom Grundton aus aufeinandergestapelt und durch Division in den Raum einer Oktave gebracht.

Die Pythagoreische Stimmung bringt zwei Probleme mit sich. Das erste ist das „Pythagoreische Komma, das eine unreine Quinte erzwingt (Arbonés & Milrud, 2019, S. 25). Das zweite Problem ist, dass die großen Terzen der Tonleiter durch das Aufeinanderschichten von Quinten, nicht dem Verhältnis von 5/4 entsprechen. Diese Abweichung wird auch als „Ptolemäisches Komma“ bezeichnet (Link Jr, 1965, S. 139).
Wird das Ptolemäische Komma korrigiert, gelangt man zur „reinen diatonischen Stimmung“. Dieses wird hier zur Veranschaulichung der Konstruktion einer Skala genauer erläutert. Bei der reinen diatonischen Stimmung werden ausgehend vom Grundton die Quarte und die Quinte unter Zuhilfenahme des Verhältnisses 3/2 berechnet. Dieses lässt sich auch für die Quarte anwenden, da diese auch durch einen Sprung einer Quinte vom Grundton nach unten erreicht werden kann. Anschließend werden die großen Terzen vom Grundton, der Quarte und der Quinte aus gebildet, mit dem Verhältnis 5/4. Die große Sekunde wird über einen Quintsprung nach oben von der Quinte aus erreicht (Arbonés & Milrud, 2019, S. 25-26). Somit erhält man eine rein gestimmte Dur-Tonleiter. Hierbei sind jedoch nur die Intervalle der Dur-Tonleiter rein gestimmt. Das pythagoreische Komma ist nach wie vor vorhanden, es wird lediglich auf andere Intervalle verschoben (Arbones & Mildrud, 2019, S.29).

Das gleiche Prinzip kann ebenfalls durch einen Chor oder ein Streichensemble angewandt werden, da die verwendeten Instrumente (Stimme bzw. Geige, Bratsche, Cello & Kontrabass) keine vorgegebene Unterteilung der Oktave haben. Wichtig ist jedoch, dass in diesem Fall nicht in einer alternativen Skala gedacht wird. Die Harmonien werden eher dem Ohr folgend, von der gleichstufigen Stimmung ausgehend, angepasst.
Das Approximieren von reinen Terzen gleicht in gewisser Weise einer Umsetzungsmöglichkeit von „mitteltönigen Stimmungen“. Eine häufige Verwendung von dieser war europäische Orgelmusik. Bei der dort verwendeten mitteltönigen Stimmung werden die Quinten leicht erniedrigt, um rein gestimmte große Terzen zu erhalten (Link Jr. 1965). In der Praxis kann dies durch zusätzliche Tasten auf der (Orgel)Klaviatur umgesetzt werden.

2. Die gleichstufige bzw. wohltemperierte Stimmung

Die reine diatonische Stimmung ermöglicht das Spielen reiner Intervalle, allerdings nur in Bezug auf einen festen Grundton. Dies gilt definitionsgemäß für alle relativen Stimmungen, die auf den Frequenzverhältnissen der reinen Intervalle beruhen. Der Grund hierfür ist das pythagoreische Komma.

Soll der Grundton gewechselt werden, ist ein Neuausrichten der Tonleiter erforderlich. Dieses ist jedoch in der musikalischen Praxis in den meisten Fällen nicht sinnvoll umsetzbar.
Die gleichstufige bzw. (wohl)temperierte Stimmung hingegen lässt einen Grundtonwechsel ohne Einschränkungen zu. Bei dieser wird der Frequenzabstand einer Oktave (2/1) in 12 gleich große Abschnitte unterteilt.
Dadurch weichen die Intervalle zwangsläufig von ihren reinen Schwingungsverhältnissen ab. Die Methode zur Berechnung gleichstufiger Skalen wird in Kapitel 3 erläutert.

3. Definition von Mikrotonalität

Grundsätzlich kann (aus Sicht der westlichen Harmonielehre) jede Harmonie und Tonalität, deren Frequenzen von der gleichstufigen Stimmung abweichen, als mikrotonal bezeichnet werden. Folgt man dieser Definition, schließt dies (wie schon in der Einleitung angemerkt) auch Bendings und bestimmte Slides auf regulären Instrumenten der westlichen Musik ein. Darüber hinaus findet sich in nicht-westlicher Musik Mikrotonalität.
Ein substanzieller Bestandteil dieser ist nach obiger Definition mikrotonal. Einige der maqam der arabischen Musik und auch Indische klassische Musik beinhalten Vierteltöne, Dritteltöne (und weitere). Diese werden in der indischen Musik „Shruti" genannt (McCarthy, 1911).

Wenn von Mikrotonaliät gesprochen wird, ist damit jedoch oftmals Musik gemeint, die die gleichstufige 12-Tönige Unterteilung der Oktave verlässt und stattdessen eine feinere Unterteilung vornimmt. Diese muss nicht unbedingt auf Oktaven basieren (siehe Kapitel 2).
Mit der Arbeit mit solchen Skalen wurde Anfang des 20. Jahrhunderts von Musikern wie Ivor Darreg experimentiert (Narushima, 2018, S.1). Darreg prägte den Begriff „Xenharmonics", für:

„Pitches, intervals, and chords which do not sound like the 12-tone equal temperament generally in use on standard keyboard and fretted instruments" (Darreg, 1981, S. 23).

Also „Tonhöhen, Intervalle und Akkorde, die nicht wie die 12-tönige gleichstufige Stimmung klingen, welche im Allgemeinen auf Standardklaviaturen und Bundinstrumenten verwendet wird."
Der Begriff Xenharmonik wird nach wie vor als Bezeichnung für mikrotonale Musik verwendet.
Wenn in dieser Arbeit von Mikrotonalität gesprochen wird, ist damit (nach obiger Definition) jede Abweichung von den Frequenzen der gleichstufigen Stimmung gemeint. Wenn von mikrotonalen oder xenharmonischen Skalen die Rede ist, meint dies jedoch Skalen, welche den Frequenzraum grundlegend anders als die gleichstufige Stimmung unterteilen.

Zum Abschluss dieses Kapitel soll kurz das Konzept der mikrotonalen Modulation erwähnt werden. Als Modulation wird in der westlichen Harmonielehre der Wechsel des Tonalen Zentrums (des Grundtons) bezeichnet. Ein plakatives Beispiel hierfür ist der Song „Love on Top“ von Beyonce. Der Song startet in C-Dur und moduliert anschließend in Halbtönen nach oben. (Knowles, 2011). Bei mikrotonalen Modulationen wird ebenfalls der Grundton gewechselt, mit dem Unterschied, dass der neue Grundton nicht innerhalb des vorher verwendeten Stimmsystems liegt. Dies heißt aber nicht, dass die alte oder die neue Tonalität mikrotonal sein muss. Ein klassisches Beispiel hierfür ist die Interpretation des Songs „Moon River“ von Jacob Collier (Collier, 2019). Gegen Ende des Songs wird von Bb-Dur zu D‡-Dur (Erklärung der Notation in Kapitel 2).

Kapitel 2: Vorstellung der behandelten Skalen

Im Rahmen dieser Arbeit werden 3 verschiedene mikrotonale bzw. xenharmonische Stimmungen betrachtet. Die zwei EDO-Skalen sowie die Bohlen-Pierce Skala sind weit verbreitete miktrotonale Skalen.
In Kapitel 2 werden die Skalen vorgestellt und ihre Anwendungsfelder und die Art sie zu notieren mit Beispielen umrissen. Kapitel 3 befasst sich mit der Berechnung der genauen Frequenzwerte.
In Kapitel 4 wird die Umsetzung der Skalen in einer DAW vorgenommen. Kapitel 5 befasst sich schließlich mit der Veranschaulichung der Skalen und der durch sie umgesetzten Musik, anhand von Hörbeispielen.

1. 24EDO: Vierteltöne

Die Unterteilung der Oktave in 24 Töne fügt zur wohltemperierten chromatischen Skala sogenannte Vierteltöne hinzu. Ein großer Vorteil von diesen ist, dass durch sie einerseits mikrotonale Intervalle gespielt werden können und andererseits in der gleichen Stimmung auch wohltemperierte Musik spielbar ist (Darreg, 1947). So kann beispielsweise auf einer Gitarre mit zusätzlichen Bünden, die Vierteltöne möglich machen, ein Stück nach wie vor in wohltemperierter Stimmung gespielt werden. Die Vierteltöne können dann zum Erreichen eines fremderen Klangs eingestreut werden. Die vierteltönige Skala ist auch Basis für eine Fülle an Kompositionen, die die konventionelle westliche Harmonielehre verlassen. Zudem finden Vierteltöne als Klangfarbe auch im Jazz Verwendung (Ellis, 1975). Eine Demonstration mit Hörbeispielen ist in Kapitel 5 zu finden.

Darstellung in Notenschrift

Da die vierteltönige Skala als Ergänzung zur gleichstufig gestimmten chromatischen Skala behandelt werden kann, ist es einfach, die Vierteltöne in der konventionellen westlichen Notation darzustellen. Historisch gibt es dafür verschiedene Symbole. Da ein Teil der arabischen Musik Vierteltöne beinhaltet, finden sich in der dort verwendeten Notation ebenfalls Symbole dafür.

In dieser Arbeit werden für Vierteltöne folgende Symbole verwendet (Vai, 2019, S.11):

- 𝄲 *1/4-Ton nach oben*
- 𝄰 *3/4-Ton nach oben*
- 𝄳 *1/4-Ton nach unten*
- 𝄭 *3/4-Ton nach unten*

Unter Verwendung dieser Symbole sieht die gleichstufige 24-Töne chromatische Skala in Notenschrift folgendermaßen aus:

2. 31EDO

Genau wie bei der vierteltönigen gleichstufigen Stimmung wird auch bei 31EDO (equal division of the octave) die Oktave in gleich große Frequenzabschnitte unterteilt. Da die Unterteilung aber kein Vielfaches von 12 (der Anzahl der Töne der wohltemperierten Stimmung) ist, finden sich – im Gegensatz zur vierteltönigen Stimmung - keine Frequenzen der wohltemperierten Skala in 31EDO. Jedoch ermöglicht die Unterteilung in 31 Töne eine bessere Annäherung an die reinen Intervalle als die gleichstufige Stimmung (siehe Kapitel 3).
Obwohl 31EDO sich in vielen modernen mikrotonalen Kompositionen wiederfindet, ist die Erkenntnis, dass sich durch das Unterteilen der Oktave in 31 Schritte reine Intervalle annähern lassen, nicht neu. So nutzte der niederländische Physiker und Mathematiker Christiaan Huygens bereits im 17. Jahrhundert die 31-Tönige Unterteilung der Oktave als Alternative zur wohltemperierten Stimmung. In den 1940ern wurde die Arbeit von Huygens (und anderen Akademikern dieser Zeit) vom niederländischen Physiker Adriaan D. Fokker aufgegriffen. Somit gelangte die 31-Tönige Stimmung zu einer größeren Bekanntheit (de Beer, 1965).

Darstellung in Notenschrift

Die vierteltönige Stimmung ist mithilfe der oben dargestellten Zusatzvorzeichen sehr einfach in die reguläre Notenschrift integrierbar. Bei 31EDO ist dies etwas schwieriger, es gibt mehrere gängige Varianten zur Darstellung.

Da kein Ton von 31EDO der wohltemperierten Stimmung entspricht und die Aufteilung von gleich vielen „Untertönen" pro Ton (24/12 = 2 bei 31EDO; aus C wird C𝄲 , aus C# wird C𝄰) nicht möglich ist (31/12 ≈ 2,584), kann theoretisch ganz auf die Verwendung von Notennamen verzichtet werden. Anstelle von Buchstaben können alternativ „Pitch-Classes" (Siehe Kapitel 3) verwendet werden.

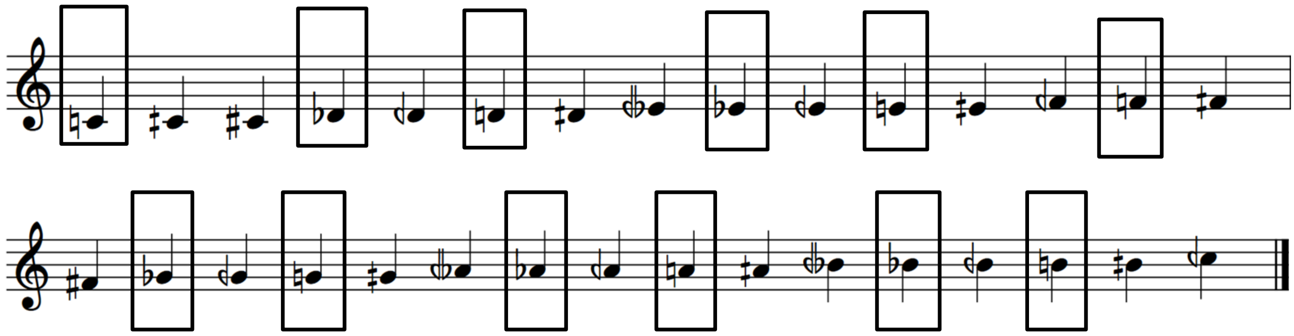
Da in 31EDO jedoch Töne enthalten sind, die eine chromatische 12-tönige Skala abbilden, ist eine Verwendung der gängigen Notennamen (A, Bb, B, C, etc.) trotzdem sinnvoll (Benennungssystem nach Fokker, 1955. Siehe hierzu auch Xenharmonik-Wiki: 31EDO).

Wichtig ist bei dieser Benennung, dass die Abstände zwischen den so definierten „Halbtönen" (z.B. C zu Db) nicht gleich sind. So liegen bei diesem Benennungssystem zwischen C und Db zwei Mikrotöne und zwischen Db und D nur ein Mikroton. Das bedeutet, dass diese Tonaufteilung nur in Bezug auf einen festen Grundton Sinn ergibt. Wird dieser gewechselt müssen die Ton-Namen ebenfalls angepasst werden.

Im Folgenden wird zur Zuordnung der Töne mit den 31 Stufen als Zahlenwerte von 1-31 gearbeitet. Gestartet wird mit den Tönen, die die chromatische Skala in Bezug auf den Ton C (der Grundton in diesem Beispiel) bilden, also C, Db, D, Eb etc. Jedem dieser Töne wird nun eine der 31 Stufen zugewiesen. C bekommt die Stufe 1: C(1). Die Chromatische Skala hat diese Werte:

C(1); Db(4); D(6); Eb(9); E(11); F(14); Gb(17); G(19); Ab(22); A(24); Bb(27); B(29).

Die Werte dazwischen werden anschließend mit Zwischentönen aufgefüllt (siehe Notensystem). Um alle Töne enharmonisch korrekt wiedergeben zu können, werden zusätzliche Vorzeichen benötigt. Diese sind oftmals die Zeichen x (4 Tonschritte nach oben) und bb (4 Tonschritte nach unten). In diesem Fall werden diese jedoch nicht benötigt.



Bei diesem System läuft der Betrachter schnell Gefahr, die Notenschrift gewohnheitsmäßig mit der Darstellung einer 12-Stufigen temperierten Skala mit Vierteltönen und enharmonischen Verwechslungen zu halten. Dem ist nicht so, C# und Db sind nicht der gleiche Ton. Enharmonische Verwechslungen können allerdings trotzdem erzeugt werden. C# entspricht beispielsweise dem Ton Db.

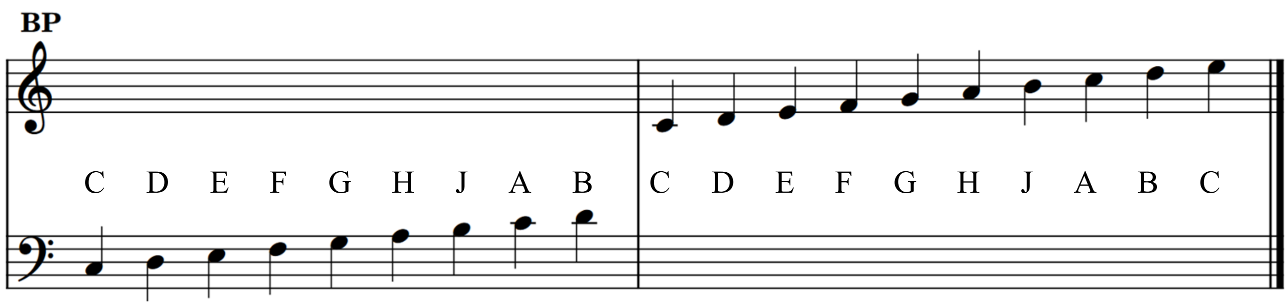
3. Bohlen-Pierce Skala

Die Bohlen-Pierce Skala wird in dieser Arbeit behandelt, da sie im Gegensatz zu EDO24 und EDO31 nicht auf der Unterteilung der Oktave beruht und sich somit in ihrer Konstruktion stark von der gleichstufigen Stimmung unterscheidet. Die Bohlen-Pierce Skala basiert auf der Unterteilung der Duodezime, einem Intervall bestehend aus einer oktavierten Quinte (3/2*2) mit dem Frequenzverhältnis 3/1, in 13 Schritte (Bohlen, 1978).
Die Bohlen-Pierce Skala lässt sich (gleichstufig) durch Unterteilung der Duodezime in 13 gleich große Schritte erzeugen. Dies hat den Vorteil, dass der Grundton innerhalb einer Stimmung flexibel gewechselt, also moduliert werden kann.
Wird die Skala jedoch mit den von Heinz-Bohlen definierten Verhältnissen relativ berechnet, entsprechen die Intervalle dementsprechend genau diesen. Die Entdeckung der Bohlen-Pierce Skala basiert auf diesen Verhältnissen
Entwickelt und publiziert wurde das Konzept in den 1980er Jahren vom deutschen Ingenieur Heinz Bohlen. Unabhängig von Bohlens Veröffentlichung wurde das Konzept einige Jahre von Kees van Prooijen und John Pierce entwickelt (Narushima, 2019 nach Mathews, Roberts & Pierce, 1984).
Der heute gängige Name der Skala setzt sich aus den Nachnamen von Heinz Bohlen und John Pierce zusammen.

Ziel von Bohlen war, weitere konsonant klingende, ungerade Frequenzverhältnisse in einer Skala unterzubringen. Das Ergebnis dieser Forschung war die Unterteilung der Duodezime in 13 Töne (Bohlen, 1978, S.80-82).

Darstellung in Notenschrift

Es gibt mehrere Vorschläge zur Notation der Bohlen-Pierce Skala, momentan gibt es keine standardisierte Darstellung. Zur Darstellung der Beispiele in dieser Arbeit wird eine Notation verwendet, die sich auf den sogenannten „Lambda-Modus“ der Bohlen-Pierce Skala bezieht. Dieser ist eine 9-Stufige Tonleiter aus den Tönen der Bohlen-Pierce Skala. Dieser ist einer der gebräuchlichsten Modi und hat Qualitäten die ihn als Modus für die Tonika brauchbar machen (Walker, 2023).
Die hier gezeigte Möglichkeit zur Notation wurde von Manuel Op de Coul entwickelt (The Bohlen-Pierce Site: BP Notation, 2013). Sie verwendet das normale Notensystem mit 5 Linien. Der Violinschlüssel wird durch das Akronym „BP“ ergänzt.



Im Gegensatz zu den Notationen der anderen vorgestellten Skalen gibt dieses Notenbild für sich keine Auskunft auf das Stimmsystem. Für die Herleitung der Töne der Bohlen-Pierce Skala und wie die Frequenzschritte verteilt sind, siehe Kapitel 3.

Kapitel 3: Herleitung und Berechnung

Im Folgenden wird ein System zur Berechnung der Frequenzen der vorgestellten Skalen vorgestellt. Anschließend werden diese in tabellarischer Form dargestellt. Da die verschiedenen Skalen in diesem Kapitel übersichtlich aufgelistet sind, wird an dieser Stelle direkt ein Vergleich zu den reinen Intervallen der Obertonreihe gemacht, die Bedeutung dieser Unterschiede wird in Kapitel 5 demonstriert.
Alle der in diesem Kapitel aufgeführten Ergebnisse wurden im Rahmen der Erstellung dieser Arbeit neu berechnet.

1. Definition einer Bezugsfrequenz

Die vorgestellten EDO-Skalen basieren auf der gleichmäßigen Unterteilung der Oktave und somit nicht unmittelbar auf Frequenzverhältnissen (die Intervalle können natürlich trotzdem als Verhältnis dargestellt werden).
Dennoch funktionieren auch diese nur relativ zu einem Bezugsintervall, der Oktave. Ohne dieses fehlt die Angabe der Größe des Frequenzraumes, der gleichmäßig unterteilt werden soll.
Sollen konkrete Frequenzwerte berechnet werden, wird neben dem Bezugsintervall außerdem eine Bezugsfrequenz bzw. ein Stimmton benötigt, der angibt, von welcher Frequenz aus die Oktaven gebildet werden. Dieser liegt seit 1939 bei A4 = 440 Hz (Schröder, 1982, S. 74).

2. Berechnung mit Cents

Die Basis für die meisten der behandelten Skalen ist die Oktave. Das bedeutet, dass sich der innerhalb einer Oktave aufgeteilte Tonraum in gleichmäßigen Abständen wiederholt.
Zur technischen Umsetzung einer Skala werden die genauen Frequenzen der Töne in Hertz benötigt. Diese nach Frequenzverhältnissen (siehe Kapitel 1) zu berechnen ist mit einfacher Mathematik möglich:
Eine Oktave hat das Verhältnis 2/1. Wird also eine Oktave x_1 vom Bezugston x_0 = 40 Hz gebildet, ist $x_1 = 2 \times x_0 = 80$ Hz.
Soll eine jedoch Oktave in gleichgroße Abschnitte unterteilt werden, ist dies etwas schwieriger, da die Frequenz bei Oktavsprüngen exponentiell größer wird. Die menschliche Wahrnehmung hingegen empfindet die Schritte als gleichbleibend.

$$x_0 = 40 \text{ Hz};\ \ x_1 = 80 \text{ Hz};\ \ x_2 = 160 \text{ Hz};\ \ x_3 = 320 \text{ Hz};\ ...$$

Um den Abstand zweier Frequenzen entsprechend der menschlichen Wahrnehmung darzustellen, sowie die gleichmäßige Unterteilung eines Frequenzraumes zu vereinfachen, können die exponentiell wachsenden Frequenzwerte in eine arithmetische Folge umgewandelt werden. Dies ist mithilfe des Logarithmus möglich (Tymoczko, 2011, S. 29). Die Herleitung dazu wird im Folgenden erläutert:

Wird eine Frequenz F_0 um x Oktaven erhöht, berechnet sich die neue Frequenz F_x durch:

$$F_x = F_0 \times 2^x$$

Die Basis des Exponenten ist 2, da eine Oktave das Verhältnis 2/1 hat. Durch Logarithmieren lässt sich daraus eine einfache Formel erstellen, mithilfe derer Oktavschritte in eine ganzzahlige arithmetische Folge umgewandelt werden:

$$P_n = 1 + \log_2(\frac{F(Pn)}{F(P1)})$$

P_1 ist in diesem Beispiel die Bezugsfrequenz, der Start-Ton und somit auch die „Startzahl“ in der arithmetischen Folge. Unabhängig von der Frequenz ist der Wert von P_1 immer 1. Um die Formel zu demonstrieren, werden für $F(P_1)$ 440, und für $F(P_2)$ etc. die Frequenzen der Oktaven von 440 eingesetzt:

$$P_1 = 1 + \log_2(\frac{440}{440}) = 1 \qquad P_2 = 1 + \log_2(\frac{880}{440}) = 2 \qquad P_3 = 1 + \log_2(\frac{1760}{440}) = 3$$

Wird der Frequenzwert der Quinte von P_1, also $440 \times 3/2 = 660$, eingesetzt, erhält man in diesem System eine Zahl mit Nachkommastelle:

$$P_{1+\text{Quinte}} = 1 + \log_2(\frac{660}{440}) \approx 1.584963$$

Diese Formel bietet nur wenigen Praktischen Wert und soll an dieser Stelle lediglich zur Demonstration des Konzepts dienen. Größerer Nutzen lässt sich jedoch daraus ziehen, wenn nicht Oktaven als Ganze Zahlen dargestellt werden, sondern Zahlenwerte für die feinere Unterteilung dieser entstehen. Dies ist zwar auch mit dem obigen Modell möglich, wie beim Einsetzen der Quinte gezeigt wurde. Jedoch ist das Hantieren mit den Nachkommastellen wenig praktikabel.

Um besser mit dem Ergebnis arbeiten zu können, muss ein Vorfaktor hinzugefügt werden:

$$P_n = 1 + 1200 \times \log_2(\frac{F(Pn)}{F(P1)})$$

Somit erhält man die Berechnungsformel für die Maßeinheit „cent“ (Helmholtz, 2013). Durch die feine ganzzahlige Unterteilung lassen sich mit dieser mikrotonale Abweichungen gut darstellen. Durch den Vorfaktor 1200 beträgt die Distanz eine Oktave immer 1200 und die Distanz eines gleichstufigen Halbtons immer 100.

3. Arbeit mit Pitch Classes

Die oben vorgestellte Formel bietet die Grundlage für die Definition von „Pitch-Classes“. Dies ein musiktheoretisches Konzept, welches die Berechnung der nachfolgenden mikrotonalen Skalen erheblich vereinfacht.

Das Grundprinzip von Pitch-Classes ist, dass Töne, die zueinander im Abstand von einer oder mehreren Oktaven liegen, zu einer „Pitch-Class“ gehören. Die Töne A4 = 440 Hz und A5 = 880 Hz gehören in eine „Pitch-Class“. Trotz ihrer verschiedenen Oktavierung werden beide mit dem Buchstaben „A“ benannt.

Als Grundlage für die nachfolgenden Berechnungen weisen wir nun jeder Pitch-Class (P) der wohltemperierten Stimmung eine Zahl von 1 – 12 zu, unter Abwandlung der obigen Formel (vlg. Tymoczko, 2011, S.30). Der Start-Ton ist für dieses Beispiel a^1 =400 Hz.

$$P = 1 + 12 \times \log_2\left(\frac{F(Pn)}{F(440)}\right) = 1$$

$$A\# = 1 + 12 \times \log_2\left(\frac{466{,}164}{440}\right) \approx 2$$

$$\dots$$

$$D\# = 1 + 12 \times \log_2\left(\frac{662{,}254}{440}\right) \approx 7$$

Stellt man die Formel um, können die Frequenzen der Töne durch Einsetzen der Pitch-Classes ausgegeben werden:

$$F(P) = 440 \times 2^{\frac{(p-1)}{12}}$$

$$F(2) = 440 \times 2^{\frac{(2-1)}{12}} \approx 466{,}164 = A\#\ \textit{(wohltemperiert)}$$

$$F(7) = 440 \times 2^{\frac{(7-1)}{12}} \approx 622{,}254 = D\#\ \textit{(wohltemperiert)}$$

Mithilfe dieser Formel können alle Frequenzen der gleichstufigen Stimmung berechnet werden. Für die Frequenz von A, A#, B, C, C# müssen für P lediglich die entsprechenden Werte, also 1, 2, 3, 4, 5 etc. eingesetzt werden.

4. Berechnung von 24EDO

Im Folgenden werden die Frequenzen für die 24 Pitch-Classes der 24-Tönigen gleichstufigen Stimmung berechnet. Grundsätzlich ließen sich diese auch auf Basis der Frequenzen der gleichstufigen Stimmung berechnen, indem auf jeden Ton 50 Cent aufgerechnet werden. Da dies aber bei den nachfolgenden Skalen nicht möglich ist, wird vorgegangen, als würden die Frequenzwerte der gleichstufigen Stimmung nicht zur Verfügung stehen.
Als Bezugsfrequenz wird wieder A4 = 440 Hz verwendet. Theoretisch könnten mit obiger Formel direkt die konkreten Frequenzen für mehrere Oktaven bestimmt werden. Dies ist jedoch aufwendig und widerspricht der Idee der Pitch-Classes. Stattdessen werden nur die Frequenzwerte für eine Oktave bestimmt. Oktavierungen der Töne können dann durch Multiplizieren mit 2 (Oktave nach oben) oder mit 2/1 (Oktave nach unten) errechnet werden.

Berechnung der Frequenzen

Die obige Formel eignet sich grundsätzlich ohne Veränderungen zur Berechnung von EDO24.

Besitzt P(A) den Wert 1 und P(A#) den Wert 2, hat somit P(A𝄲) den Wert 1,5. Da die Oktave aber in 24 (gleichwertige) Töne aufgeteilt werden soll und um die spätere Oktavierung zu erleichtern, wird hier zur Berechnung der Pitch-Classes die Formel so angepasst, dass jeder Viertelton eine ganze Zahl zugewiesen bekommt. Dazu muss lediglich der Faktor 12 auf 24 geändert werden. Die Formeln dazu sehen wie folgt aus (1. zur Umrechnung vom Frequenzverhältnis zur Pitch-Class, 2. zur Umrechnung von der Pitch-Class zum Frequenzverhältnis:

1. $P = 1 + 24 \times \log_2(\frac{F(P)}{F(440)})$
2. $F(P) = 440 \times 2^{\frac{(p-1)}{24}}$

Um die Frequenzen für alle Pitch-Classes zu berechnen, müssen lediglich die Werte von 1 bis 24 in die zweite Formel eingesetzt werden. Hier beispielhaft für P(A) = 1; P(A𝄲) = 2 und P(C𝄳) = 6:

$$F(A) = F(1) = 440 \times 2^{\frac{(1-1)}{24}} = 440$$

$$F(A𝄲) = F(2) = 440 \times 2^{\frac{(2-1)}{24}} \approx 452{,}893$$

$$F(C𝄳) = F(6) = 440 \times 2^{\frac{(6-1)}{24}} \approx 508{,}354$$

Geht man in gleicher Art für die anderen Pitch-Classes vor, erhält man diese Ergebnisse:

Ton	A	A‡	A#	A♯‡	B	B‡	C	C‡	C#	C♯‡	D	D‡
Pitch-Class	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frequenz (Hz)	440	452,893	466,164	479,822	493,883	508,354	523,251	538,584	554,365	570,608	587,330	604,540

Ton	D#	D♯‡	E	E‡	F	F‡	F#	F♯‡	G	G‡	G#	G♯‡
Pitch-Class	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Frequenz (Hz)	622,254	640,486	659,255	678,573	698,456	718,923	739,989	761,671	783,991	806,964	830,609	854,946

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden enharmonische Verwechslungen in der obigen Tabelle ignoriert. A‡ hat die gleiche Frequenz wie B𝄳♭ und A♯‡ die gleiche Frequenz wie B𝄳.

Vergleich der Töne mit den reinen Intervallen

In Kapitel 1 wurde intensiv auf die Bedeutung der Obertonreihe und deren reine Intervalle mit einfachen Frequenzverhältnissen eingegangen. Die Annäherung an diese Intervalle ist nicht das erklärte Ziel aller mikrotonalen Skalen. Trotzdem sollen hier die konkreten Frequenzwerte miteinander verglichen werden.
Durch Multiplizieren der Bezugsfrequenz 440 mit den Frequenzverhältnissen der ersten Obertöne Teiltöne erhält man folgende Frequenzen:

$$\text{Quinte: } 440 \times \frac{3}{2} = 660; \quad \text{Quarte: } 440 \times \frac{4}{3} \approx 586{,}667; \quad \text{gr. Terz: } 440 \times \frac{5}{4} = 550;$$

$$\textit{kl. Terz: } 440 \times \frac{6}{5} = 528;$$

Vergleicht man diese Frequenzwerte mit denen von EDO24 (siehe Tabelle) stellt man fest, dass die Frequenzen, die der temperierten Skala entsprechen, näher an denen der reinen Intervalle liegen:

gr.Terz(rein) = 550 Hz; C#(EDO24) = 554,365 Hz. Differenz: 13,684ct;

C‡ = 538,584 Hz. Differenz: 36,311ct

36,311 ct > 13,684 ct

Die Vierteltönige Skala eignet sich folgendermaßen nicht zum Approximieren der reinen Intervalle.

5. Berechnung von 31EDO

Da 24EDO die Töne der wohltemperierten Stimmung beinhaltet, können die Töne einfach von Bezugston A4 =440Hz aus berechnet werden. Anschließend kann die Skala dann genauso vom Ton C4 oder jedem anderen Grundton ausgehend gebildet und nach wie vor mit der wohltemperierten Stimmung verglichen werden. Die Frequenz des Grundtons weicht dabei nicht von der wohltemperierten Stimmung ab.
Dies ist bei 31EDO nicht möglich, da der Ton C bezogen auf den Ton A, ein anderer als der Ton C in der gleichstufigen Stimmung ist:

Distanz von A zu C: *Temperiert: 300ct* $\neq$ *EDO31: 309.68ct.*

Um einen direkten Vergleich der Skalen zu ermöglichen und die Darstellung in Notenschrift zu vereinfachen, werden alle folgenden Skalen deshalb vom Stimmton A4 = 440hz aus (gleichstufig) berechneten Ton C4 gebildet. Dieser ist C4 = 261,626 Hz.

Berechnung der Frequenzen

Wie auch bei der Berechnung von 24EDO müssen einige Anpassungen an der Formel vorgenommen werden. Der Faktor, der die ganzzahlige Unterteilung definiert, muss für eine 31-Tönige Unterteilung 31 betragen. Zusätzlich muss die Bezugsfrequenz von 440 auf 261,626 geändert werden. Die Formeln dazu sehen nach Anpassung wie folgt aus (1. zur Umrechnung vom Frequenzverhältnis zur Pitch-Class, 2. zur Umrechnung von der Pitch-Class zum Frequenz-verhältnis:

1. $P = 1 + 31 \times \log_2(\frac{F(P)}{F(261{,}626)})$
2. $F(P) = 261{,}626 \times 2^{\frac{(P-1)}{31}}$

Genau wie bei EDO24 werden auch hier die Werte der Pitch-Classes eingesetzt. An dieser Stelle beispielhaft mit den Werten P(C) = 1, P(Eb) = 9 und P(E‡) = 12.

$$F(C) = F(1) = 261{,}626 \times 2^{\frac{(1-1)}{31}} = 261{,}626$$

$$F(Eb) = F(9) = 261{,}626 \times 2^{\frac{(9-1)}{31}} \approx 312{,}872$$

$$F(E‡) = F(12) = 261{,}626 \times 2^{\frac{(12-1)}{31}} \approx 334{,}577$$

Die Vollständige Frequenztabelle von EDO31, von C aus berechnet, sieht folgendermaßen aus. Die in 31EDO enthaltene chromatische Skala ist fett markiert:

Ton	**C**	C‡	C#	**Db**	Dƀ	**D**	D‡	Eȸ	**Eb**	Eƀ
Pitch-Class	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frequenz (Hz)	261,626	267,542	273,590	279,778	286,104	292,573	299,187	305,952	312,872	319,945

Ton	**E**	E‡	Fƀ	**F**	F‡	**F#**	**Gb**	Gƀ	**G**	G‡	Aȸ
Pitch-Class	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Frequenz (Hz)	327,180	334,577	342,144	349,880	357,790	365,882	374,155	382,615	391,265	400,112	409,161

Ton	**Ab**	Aƀ	**A**	A‡	Bȸ	**Bb**	Bƀ	**B**	B‡	Cƀ
Pitch-Class	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Frequenz (Hz)	418,411	427,872	437,547	447,442	457,559	467,905	478,485	489,303	500,367	511,681

Bei P(A) = P(24), zeigt sich erneut, dass es im Vergleich zur gleichstufigen Stimmung einen Unterschied macht, wenn welchen Bezugston aus gerechnet wird. 437,547 ≠ 440.

Vergleich der Töne mit den reinen Intervallen

Um die errechneten Frequenzwerte von EDO31 mit denen der reinen Intervalle abzugleichen, müssen diese zunächst auf die Bezugsfrequenz C = 261,626 Hz umgerechnet werden:

$$\text{Quinte: } 261{,}626 \times \frac{3}{2} = 392{,}439; \quad \text{Quarte: } 261{,}626 \times \frac{4}{3} \approx 348{,}835;$$

$$\text{gr. Terz: } 261{,}626 \times \frac{5}{4} = 327{,}033; \quad \textit{kl. Terz: } 261{,}626 \times \frac{6}{5} = 313{,}960$$

Schon beim Vergleich der Frequenzen zeigt sich eine sehr nahe Übereinstimmung. Um die Differenz exakt darzustellen, werden die Werte in Cents umgerechnet. In der folgenden Tabelle werden zum besseren Vergleich zusätzlich die Intervallgrößen der gleichstufigen Stimmung angeführt.

Intervall	**Reine Stimmung**	**Gleichstufige Stimmung**	**EDO31**
Quinte	701,954	700	696.767
Quarte	498.047	500	503.224
gr. Terz	386.316	400	387.094
kl. Terz	315.690	300	309.680

Wie in der Tabelle zu sehen ist, nähert sich die gleichstufige Stimmung den Intervallen der Quinte und Quarte besser an als EDO31: Die Abweichung von den reinen Intervallen beträgt jeweils -1,954 ct (Quinte) und -1,953 ct (Quarte). EDO31 weicht hier um jeweils um -3,233 ct und +3,224 ct ab. Die Abweichungen beider Skalen sind in dieser Größenordnung jedoch zu vernachlässigen. Eine Tonabweichung von 1-2 Cent ist für das menschliche Gehör nicht wirklich wahrnehmbar.

Viel bedeutsamer sind die Abweichungen der gleichstufigen Stimmung bei der großen und der kleinen Terz. Die Abweichung beträgt hier für große Terz +13.684 ct und für die kleine Terz -15,689 ct. Bei EDO31 sind es lediglich +0,778 ct (gr. Terz) und -6,01 ct (kl. Terz).
Die Abweichungen von EDO31 sind, wie bei der Quarte und Quinte, kaum wahrnehmbar. Die Abweichungen der gleichstufigen Stimmung hingegen sind erheblich und bei direktem Vergleich auch deutlich hörbar (siehe Kapitel 5)

6. Berechnung der Bohlen-Pierce Skala

Die Bohlen-Pierce Skala kann sowohl relativ als auch gleichstufig erzeugt werden. Zur relativen Umsetzung müssen die für die Skala definierten Verhältnisse lediglich mit dem Bezugston verrechnet werden. Als Bezugston wird hier wieder C4 = 261,626 verwendet.
Die gleichstufige Herleitung funktioniert ähnlich wie bei 24EDO und 31EDO. Die Formel muss jedoch etwas stärker anpasst werden. Im Folgenden werden beide Möglichkeiten durchgeführt.

Berechnung der Frequenzen

Um die Bohlen-Pierce Skala relativ zu erzeugen, werden die Frequenzverhältnisse der einzelnen Skalenstufen benötigt. Diese lauten wie folgt (Bohlen, 1978, S.83):

Stufe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	*(14 bzw. 1)*
Verhältnis	1/1	27/25	25/21	9/7	7/5	75/49	5/3	9/5	49/25	15/7	7/3	63/25	25/9	*3/1*

Bei den vorangegangenen Berechnungen wurde die Skalenstufe des Bezugstons immer mit „1“ betitelt. Bohlen verwendet in seinem Manuskript hierfür die Null. Um einheitlich zu bleiben, wurde dies in der Tabelle angepasst.
Für die Frequenzwerte der Töne wird nun jedes Verhältnis mit der Grundfrequenz multipliziert:

$$F(1) = 261{,}626 \times \frac{1}{1} = 261{,}626$$

$$F(7) = 261{,}626 \times \frac{5}{3} = 436{,}044$$

…

Somit erhält man folgende Frequenzen:

Stufe	1	2	3	4	5	6	7
Verhältnis	1/1	27/25	25/21	9/7	7/5	75/49	5/3
Frequenz (Hz)	261,626	282,555	311,46	336,375	336,275	400,448	436,044

Stufe	8	9	10	11	12	13	*1*
Verhältnis	9/5	49/25	15/7	7/3	63/25	25/9	*3/1*
Frequenz (Hz)	470,927	512,787	560,626	610,461	659,298	726,739	*784,878*

Zur gleichstufigen Berechnung kann von den gleichen Formeln wie zur Berechnung der anderen Skalen ausgegangen werden. Ein paar Anpassungen müssen vorgenommen werden. Die Bezugsfrequenz bleibt dieselbe. Der Logarithmus in Formel 1 muss zur Basis 3 verändert werden, da nun ein Abschnitt der Größe 3/1 unterteilt wird. Dementsprechend ist auch die Basis des Exponenten in Formel 2 die Zahl 3. Ansonsten muss nur der Faktor zum Unterteilungsgrad auf 13 geändert werden.

$$1.\ P = 1 + 13 \times \log_3\left(\frac{F(P)}{F(261{,}626)}\right)$$

$$2.\ F(P) = 261{,}626 \times 3^{\frac{(P-1)}{13}}$$

Durch Einsetzen der Werte der Pitch-Classes gelangt man zu folgenden Ergebnissen:

Pitch-Class	1	2	3	4	5	6	7
Frequenz (Hz)	261,626	284,697	309,802	337,121	366,85	399,199	434,401

Pitch-Class	8	9	10	11	12	13	1
Frequenz (Hz)	472,706	514,392	559,752	609,111	662,824	721,273	784,878

Definition der Ton-Namen

Wie auch bei EDO31 ist nicht eindeutig, welcher Name welcher Pitch-Class gegeben wird. Hier werden die Töne nach dem Lambda-Modus (siehe Kapitel 2 benannt). Die folgende Tabelle zeigt Pitch-Class, Ton-Namen, Frequenzverhältnis und die Frequenzen:

Pitch-Class	1	2	3	4	5	6	7
Ton-Name	C		D	E	F		G
Verhältnis	1/1	27/25	25/21	9/7	7/5	75/49	5/3
Frequenz (relativ)	261,626	282,555	311,46	336,375	336,275	400,448	436,044
Frequenz (gleichst.)	261,626	284,697	309,802	337,121	366,85	399,199	434,401

Pitch-Class	8	9	10	11	12	13	1
Ton-Name	H		J	A		B	C
Verhältnis	9/5	49/25	15/7	7/3	63/25	25/9	*3/1*
Frequenz (relativ)	470,927	512,787	560,626	610,461	659,298	726,739	*784,878*
Frequenz (gleichst.)	472,706	514,392	559,752	609,111	662,824	721,273	784,878

Vergleich der Töne mit den reinen Intervallen

Der Vergleicht mit den reinen Intervallen ist in diesem Fall mehrdeutig. Einerseits können die Frequenzwerte der gleichstufigen Bohlen-Pierce Skala mit denen der rein gestimmten Bohlen-Pierce Skala verglichen werden. Hier zeigt sich, dass die Abweichung der gleichstufigen Skala von der relativen Skala maximal 13 Cent beträgt (Bohlen, 1978, S. 83).
Der zweite Vergleich kann mit den reinen Intervallen der reinen diatonischen Stimmung (siehe Kapitel 1) durchgeführt werden. Auch wenn das Wiedergeben der Frequenzverhältnisse der ersten Teiltöne der Obertonreihe nicht die Intention der Bohlen-Pierce Skala ist, wird er an dieser Stelle kurz angestellt:

Reines Intervall	Frequenz (Hz)	Nahes Intervall in BP	Frequenz (Hz)	Differenz (aufgerundet)
3/2 (Quinte)	701,954	25/9 (B)	726,739	+ 60 ct
4/3 (Quarte)	498.047	49/25	470,927	+ 49 ct
5/4 (gr. Terz)	386.316	75/49	400,448	+ 62 ct
6/5 (kl. Terz)	315.690	25/21 (D)	311,46	- 22 ct

Die Abweichungen sind sehr groß, bis auf die kleine Terz sogar ein Viertelton. Dies ist nicht überraschend, da der Sinn der Bohlen-Pierce Skala ausdrücklich ist, andere Frequenzverhältnisse als die hier zum Vergleich herangezogenen in einer Skala zu realisieren (Bohlen, 1978, S. 81). Wichtig ist, dass der hier vorgenommene Vergleich nur mit Intervallen in Bezug auf den Grundton angestellt wird. Die Bohlen-Pierce Skala enthält nähere Annäherungen an die reinen Intervalle. Demonstriert wird dies in der Eigenkomposition (Kapitel 5).

Kapitel 4: Umsetzung in einer DAW

1. Manuelles Umsetzen der Skalen mithilfe eines Samplers

Um den grundlegenden technischen Prozess der Umsetzung einer mikrotonalen Skala in einer DAW zu veranschaulichen, wird im Folgenden eine Möglichkeit zum Stimmen eines einfachen Samplers ohne Zuhilfenahme spezieller Plug-Ins beschrieben.
Als Basis werden hierfür Samples einer zuvor aufgenommenen akustischen Gitarre verwendet. Diese werden auf die nach den obigen Formeln berechneten Frequenzwerte gestimmt. Anschließend wird die fertige Skala auf ein Keyboard gemappt.
Alle drei behandelten Skalen umzusetzen, würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. An dieser Stelle wird nur die Bohlen-Pierce Skala (über zwei Duodezimen) realisiert. Diese wurde einerseits gewählt, da sie mit ihren 13 Tönen pro Oktave deutlich einfacher manuell umzusetzen ist als EDO24 und EDO31. Andererseits gibt es auch Gitarren, deren Griffbrett nach der Bohlen-Pierce Skala unterteilt ist (Vaisvil, 2016). Das Repertoire für diese Gitarren kann mit diesem Sampler umgesetzt werden.

Vorbereitung der Aufnahme

Um einen möglichst natürlichen Klang zu erhalten, sollte die aufgenommene Saite weder zu gespannt noch zu locker sein. Aus diesem Grund kann nicht wahllos eine Saite auf die entsprechenden Tonhöhen gestimmt werden.
Als ersten Schritt werden deshalb die Töne mit den nächsten Frequenzwerten der gleichstufigen Stimmung für die 2 × 13 Töne der gleichstufigen Bohlen-Pierce Skala bestimmt:

Duodezime 2:

Stufe (BP)	**1**	2	**3**	**4**	**5**	6	**7**	**8**	9	**10**	**11**	12	**13**	1
F(BP)	261,626	284,697	309,802	337,121	366,85	399,199	434,401	472,706	514,392	559,752	609,111	662,824	721,273	784,878
EDO12 (Ton)	C4	C#4	D#4	E4	F#4	G4	A4	A#4	C5	C#5	D#5	E5	F#5	G5

Duodezime 1:

Die Werte für die Duodezime 1 ergeben sich, wenn die Werte von Duodezime 2 mit dem Faktor 3 dividiert werden. Die Von C4 aus berechneten Werte werden nach unten erweitert, da der Tonumfang der Gitarre sonst nach oben überschritten wird.

Stufe (BP)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1
F(BP)	87,209	94,899	103,266	112,374	122,282	133,065	144,800	157,569	171,464	186,584	203,037	220,95	240,423	261,626
EDO12 (Ton)	F2	F#2	G#2	A2	B2	C3	D3	D#3	F3	F#3	G#3	A3	B3	C4

Anpassen der Tonhöhe und Aufnahme

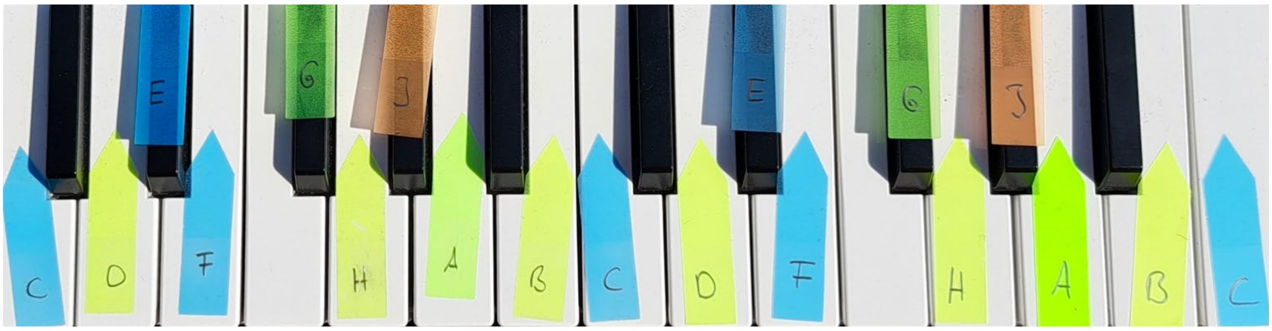
Mit diesen Werten können die Samples aufgenommen werden. Dazu werden die Noten der Tabelle auf einer mit Mikrofon versehenen Gitarre gespielt und mithilfe eines Stimmgeräts einzeln auf die exakte Frequenz angepasst. Hierfür wird das in Ableton Live integrierte Stimmgerät verwendet. Anschließend wird jeder Ton mehrfach aufgenommen. Mehrere Aufnahmen sind notwendig, um später eine rudimentäre Anschlagsdynamik umzusetzen.
Alles wird, wenn möglich, in der ersten Lage gespielt. Dies soll den unterschiedlichen Klang der dünner werdenden Saiten auf den Sampler übertragen. Außerdem wird darauf geachtet alle anderen Saiten zu jeder Zeit zu dämpfen, da die gespielten Töne andernfalls die restlichen Saiten anregen.
Die aufgenommenen Töne werden dann systematisch benannt und abgespeichert.
In der Durchführung dieses Projekts lautet die Nomenklatur:
1_BP_01_1 (*Index der Duodezime_Bohlen-Pierce Skala_Pitch-Class_Anschlagsstärke (von 1-3)*)
Auf die einzelnen Samples kann unter *Audio_0_Samples_Bohlen_Pierce_Gitarre* in den Hörbeispielen zugegriffen werden.

2. Mapping auf eine Klaviatur

Die aufgenommenen Samples werden anschließend in einen Sampler geladen. Hier wird der native Sampler von Ableton Live verwendet. Die drei Anschlagsstärken werden mit den Velocity-Werten der Midi-Eingabe verknüpft. Anschließend werden die Samples der einzelnen Töne auf eine Midi-Klaviatur gemappt. Da die Bohlen-Pierce Skala kaum mit den Halb- und Ganztonschritten der 12-

Tönigen Skala übereinstimmt ist dies (auf einem regulären Keyboard) nicht ohne Kompromisse umsetzbar. Entweder wird das sich wiederholende Muster der Tasten von Oktave zu Oktave eingebüßt, oder es können nicht alle 13 Töne untergebracht werden.
Um diese Problematik zu umgehen, wurden für das Spielen der Bohlen-Pierce Skala eigene Keyboards entwickelt (Walker, o.D.). Diese besitzen 13 Tasten pro Duodezime und bilden mit den weißen Tasten (sofern sie, wie die meisten dieser Keyboards, für den Lambda-Modus ausgelegt sind) den Lambda Modus ab. Schwarze Tasten gibt es dementsprechend zwischen Stufe C und D, F und G, H und J sowie zwischen A und B (vergleiche mit Tabelle in Kapitel 3).
Da im Rahmen dieser Arbeit kein solches Keyboard zur Verfügung steht, wurden für das Spielen der Skala die im Lambda-Modus fehlenden Töne aus der Klaviatur entfernt und die restlichen Töne in einer Oktave, zwischen C3 und C4 und C4 und C5, aufgeteilt. Das gleichbleibende Layout der Tasten ist für diesen Anwendungsfall (der grundlegenden Demonstration des Lambda-Modus) nach Ansicht des Autors wichtiger als das Inkludieren der Zwischentöne. Diese können nämlich trotzdem, mit Verwendung eines Pitch Wheels, erreicht werden.

Fotografie der beschrifteten Klaviatur zur Umsetzung der Hörbeispiele in Kapitel 5:



Anmerkung:
Mit den in Kapitel 3 errechneten Werten kann eine reguläre Gitarre in eine Bohlen-Pierce Gitarre umgewandelt werden. Aus den Verhältnissen lassen sich die benötigten Positionen der Bünde bestimmen, in dem die Länge der Mensur durch diese geteilt wird.

3. Umsetzung mit Zuhilfenahme eines Plug-Ins

Es gibt mittlerweile eine große Fülle an Plug-Ins, mit denen mikrotonale Stimmungen in einer DAW umgesetzt werden können. Weitergehend wäre an dieser Stelle ein Vergleich der verschiedenen Möglichkeiten in verschiedenen DAWs eine gute Ergänzung. Dies ist jedoch nicht der Fokus dieser Arbeit. Da der manuell erstellte und berechnete Sampler in Ableton Live erstellt wurde, wird im Folgenden kurz auf die Möglichkeiten in Ableton eingegangen. Ableton besitzt seit Version 12 der Suite hierfür ein eigenes Plug-In, genannt „Microtuner". Mit diesem können Frequenzwerte, Unterteilungen pro Oktave u.v.m. umgesetzt werden. Darüber hinaus bietet Ableton Live auch die Möglichkeit, eine globale Stimmung für die gesamte Session zu definieren, sodass alle Midi Instrumente in dieser gestimmt sind.

Kapitel 5: Veranschaulichung

Eine tiefgreifende Analyse und musiktheoretische Untersuchung der drei vorgestellten Skalen ist im Rahmen und Umfang dieser Arbeit nicht möglich. Deshalb werden zu jeder Skala nur eine kleine Auswahl an Hörbeispielen, passend zu den Eigenschaften dieser besprochen. Für die Aufnahmen von EDO24 und EDO31 wurde das Microtuner Plug-In von Ableton Live verwendet.
Die Demonstration der Bohlen-Pierce Skala verwendet ausschließlich die Sounds des in Kapitel 4 entwickelten Samplers einer Bohlen-Pierce Gitarre. Da der Sampler im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurde, wird zudem zur Bohlen-Pierce Skala eine kurze Eigenkomposition gezeigt und analysiert.

1. 24EDO

Das erste Hörbeispiel zeigt die chromatische 24-Tönige Skala. Um die Vierteltöne besser hervorzuheben, sind diese als Achtelnoten zu hören. *(Audio_1)*

Um die Intervalle besser in Bezug auf den Grundton hören zu können wurde beim zweiten Beispiel ein Pedalton hinzugefügt. *(Audio_2)*

Das nächste Beispiel zeigt eine mögliche Anwendungsmöglichkeit, nämlich einen chromatischen Durchlauf in ansonsten auf 12EDO basierender Musik. Durch die kurzen Notenwerte fallen die Mikrotöne weniger auf *(Audio_3)*.

In die gleiche Richtung geht folgender Viertelton-Lick von Don Ellis mit EDO24 (Ellis, 1975). Hier fallen die Mikrotöne deutlich stärker auf. *(Audio4)*

2. 31EDO

Das erste Hörbeispiel zu EDO31 zeigt ebenfalls die chromatische 31-Tönige Skala. Damit die Töne besser eingeordnet werden können, werden die Töne der Chromatische Tonleiter (Siehe Kapitel 2) länger und die Zwischentöne als Durchgänge gespielt. *(Audio_5)*

Das nächste Hörbeispiel zeigt eine erweiterte Kadenz. Hier sind gut die angenähert reinen Intervalle von EDO31 zu hören *(Audio_6)*

Um den Unterschied deutlicher zu machen, ist im folgendem Hörbeispiel die gleiche Kadenz in wohltemperierter Stimmung angehängt *(Audio_7)*. Besonders deutlich wird der Unterschied bei der großen Terz der Tonika (Siehe Kapitel 3)

3. Bohlen-Pierce Skala

Im Gegensatz zu den obigen Hörbeispielen sind alle Klänge in diesem Abschnitt auf einer Konzertgitarre für diese Arbeit aufgenommen und auf dem in Kapitel 4 entwickelten Sampler gespielt worden.
Das erste Hörbeispiel demonstriert alle Töne der gleichstufigen Bohlen-Pierce Skala innerhalb einer Duodezime. Hörbar ist die Verteilung von großen und kleinen Frequenzschritten innerhalb der Skala *(Audio_08)*.

Das zweite Hörbeispiel zeigt die Töne des Lambda-Modus der Bohlen-Pierce Skala über 2 Oktaven. *(Audio_09)*.

Das letzte Hörbeispiel *(Audio_10)* ist eine Eigenkomposition, gespielt auf dem im Rahmen dieser Arbeit erstellten Sampler (siehe nächste Seite). Dieser bildet, obwohl er den Lambda-Modus nur 2-mal abbildet, fast den gesamten Tonumfang einer Konzertgitarre ab. Der tiefste (normalerweise auf diesem Bund liegende) Ton ist F2 (1. Bund auf der tiefen E-Saite), der höchste G5 im 15 Bund auf der hohen E-Saite)
Das Tonmaterial besteht ausschließlich aus den Tönen des Lambda-Modus. Andere Töne der Bohlen-Pierce Skala kommen nicht vor.

Die Komposition hat eine „A-B-C-A-Form“, mit angehängtem Schluss. Im A Teil wechseln sich Konsonanz und Dissonanz ab. Der Akkord in Takt 1, bestehend aus C, G und B, erinnert an eine

Schichtung von großen Sechsten. Durch den Ton A, der Teil der Melodie ist, erklingt ein Tritonus zwischen G und A, die Harmonie kling dissonanter.

Der B-Teil ist insgesamt deutlich dissonanter. Die 2-Taktige melodische Phrase wird zwar zum Ende hin etwas konsonant, allerdings nicht besonders stark.

Im C-Teil hingegen findet sich der stärkste Kontrast zwischen Dissonanz und Konsonanz. In Takt 9 und 11 erklingt ein Akkord aus Grundton, Quinte und reiner Sexte in offener Lage. Dieser wird kontrastiert mit Takt 10 und 12. Dort wird ein F hinzugefügt, welches als Tritonus zum (um eine Duodezime verschobenen) C erklingt. Der Aufgang aus Achtelnoten in Takt 12 führt zurück zum A-Teil. Dieser wird lediglich durch zwei Top-Notes, ein hohes C und B, ergänzt.

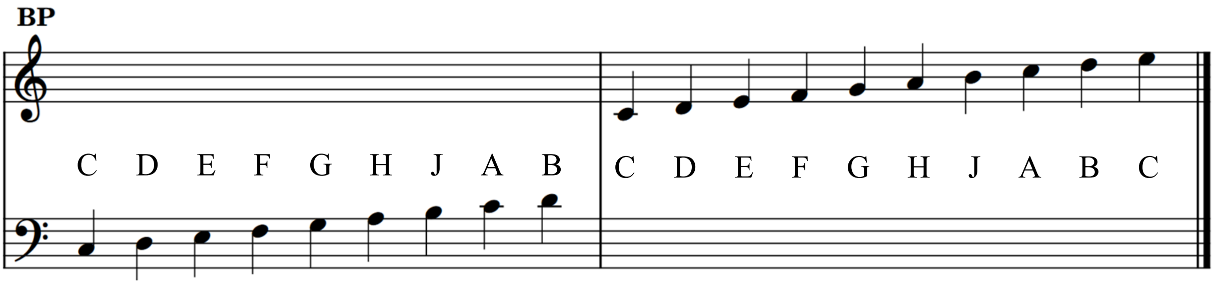
Der Schluss besteht aus einer sich zwei Mal wiederholenden Figur aus Viertel-Triolen. Die gespielten Intervalle entsprechen großen Sechsten.

Alle Notennamen der obigen Analyse beziehen sich auf das Tonsystem von Manuel Op de Coul und haben keinerlei Zusammenhang mit den Notennamen von EDO12.

Das ausnotierte Stück befindet sich auf der folgenden Seite.

Eigenkomposition in der Bohlen-Pierce Skala *(Audio_10)*, in Bohlen-Pierce Notenschrift notiert: Zum besseren Nachvollziehen ist der BP-Notenschlüssel unter dem Stück erneut dargestellt.

Der Bohlen-Pierce-Notenschlüssel, nach Manuel Op de Coul:



Fazit

In dieser Arbeit wurden die grundlegenden Konzepte der Mikrotonalität erläutert. Drei verschiedene Stimmsysteme wurden in diesem Rahmen als Beispiel angeführt. EDO24 ist sehr ähnlich zur gleichstufigen 12-Tönigen Stimmung und ist daher ein guter Einstiegspunkt.
EDO31 weicht deutlich mehr ab, bietet aber weiterhin (wie auch EDO12 und EDO24) die Möglichkeit eine 12-Tönigen Chromatische Skala zu spielen. Die Bohlen-Pierce Skala weicht deutlich von der gleichstufigen Stimmung ab, da sie das wohl wichtigste Intervall der EDO-Skalen, die Oktave, nicht beinhaltet.

In Kapitel 3 zur Berechnung wurden die notwendigen Formeln und Konzepte ausführlich demonstriert. Ausgehend von diesen, können fast alle anderen mikrotonalen Skalen umgesetzt werden.
Die anschließende manuelle Anwendung der berechneten Frequenzen dient lediglich zur groben Demonstration. Besonders die technische Umsetzung des Samplers kann deutlich ausgefeilter umgesetzt werden.
Die Veranschaulichung der Skalen im letzten Kapitel demonstriert die grundlegende Klangcharakteristik der drei Skalen. Wie aber auch im vorangegangenen Kapitel bietet dies nur eine grobe Übersicht. Einen umfassenden Überblick über das Repertoire, Komponisten und verschiedene Stilrichtungen dieser (oder auch nur einer von diesen) Skalen bietet das Potential für eine eigenständige Arbeit.
In diesem Rahmen können zu jeder der drei behandelten Skalen auch musiktheoretische Konzepte analysiert und entwickelt werden. Dies wurde in dieser Arbeit nur kurz (bei den Modi der Bohlen-Pierce Skala) gestreift, bietet allerdings eine wichtige Basis zur tiefgreifenden Analyse.

Ein Themengebiet, mit denen sich weitergehende Recherche befassen kann ist die Umsetzung von mikrotonalen Skalen auf speziell dafür gebauten Keyboards. Dieses Thema war ein großer Teil der Forschung des Musiktheoretikers Erv Wilson. Einen sehr tiefen Einblick in seine Arbeit gibt das Buch „Microtonality and the tuning systems of Erv Wilson (Narushima, 2019). Wilson stieß bei seinen Experimenten auf die Möglichkeit, das Hexagon als Basis für ein mikrotonales Knopfkeyboard zu verwenden. Ein ähnliches Keyboard mit hexagonalen Tasten ist mittlerweile auch im Handel erhältlich; das „Lumatone Isomorphic Keyboard“ (Lumatone, 2024).

Das menschliche Tonempfinden abhängig von Hörgewohnheiten ist ebenfalls ein Thema für weitergehende Forschung. Elaine Walker führte hierzu Hörversuche mit Musikern mit der Bohlen-Pierce Skala durch (Walker, 2001).
Welche Möglichkeiten aktuell verfügbare Technik zur Umsetzung von einfach spielbaren mikrotonalen Instrumenten bietet, ist ebenfalls eine lohnende Fragestellung. Ein Beispiel hierfür (unter erweiterter Definition von Mikrotonalität) ist eine (12-Tönige) Klaviatur, mit dynamischer Anpassung an die reinen Intervalle.

Literaturverzeichnis

Arbonés J. & Milrud P. (2019). *Die Mathematik der Musik: Rhythmus, Resonanz und Harmonie.* Librero IBP.

Bohlen, H. (1978). 13 Tonstufen in der Duodezime. Acustica, vol. 39 no. 2. Hirzel Verlag.

Darreg, I. (1981). Viewpoint: 2 Essays On Xenharmonics. Polyphony Magazine Vol. 7, Issue 2

de Beer, Anton. (1965) The Developement of 31-Tone Music. Sonorum Speculum

Ellis, D. (1975). QUARTER TONES: A text with musical examples, exercises and etudes. Harold Branch Publishing.

Fokker, A.D. (1955). Equal Temperament and the Thirty-one-keyed organ.

Hindemith, P. (1942). *The Craft of Musical Composition: Book 1: Theoretical Part*. Schott Music.

Link Jr, J. W. (1965). Understanding the two great temperaments: Equal and meantone. *Journal of Research in Music Education*, *13*(3), 136-146.

Mrs. Maud Mann (Maud MacCarthy). (1911). Some Indian Conceptions of Music. *Proceedings of the Musical Association*, *38*, 41–65. http://www.jstor.org/stable/765566

Narushima, T. (2018). Microtonality and the Tuning Systems of Erv Wilson. Routhledge

Partch, H. (1979) Genesis Of A Music: An Account Of A Creative Work, Its Roots, And Its Fulfillments, Second Edition, Da Capo Press, Paperback, 544 pp., 1979. ISBN 0-306-80106-X

Persichetti, V. (1961). Twentieth-Century Harmony: Creative Aspects and Practice. W. W. Norton & Company.

Schechter, M. (1980). Tempered Scales and Continued Fractions. *The American Mathematical Monthly*, *87*(1), 40–42. https://doi.org/10.1080/00029890.1980.11994951

Schröder, E. (1982). Kammerton—Weber-Fechnersches Gesetz—Gesetze von Mersenne. *Mathematik im Reich der Töne*, 74-78.

Tymoczko, D. (2011). A Geometry Of Music: Harmony and Counterpoint in the Extended Common Practice. Oxford University Press Inc.

Vai, S. (2019. Vaideology: Basic Music Theory for Guitar Players. Hal Leonard.

Von Helmholtz, H. (2013). *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*. Springer-Verlag.

Walker, E. (2001). The Bohlen-Pierce Scale: Continuing Research - Final Project in Advanced Acoustics. NYU.

Webseiten

Darreg, I. (1947). The Quartertone Question. http://www.tonalsoft.com/sonic-arts/darreg

Lumatone Inc. (2024). https://www.lumatone.io/features

Vaisvil, C. (2024, Juni). The Bohlen-Pierce Epiphone Roadie Guitar. Music & Techniques by Chris Vaisvil. http://chrisvaisvil.com/the-bohlen-pierce-epiphone-roadie-guitar/

Walker, E. (2024, Juli). Bohlen-Pierce Scale: modes and chords. Ziaspace. https://www.ziaspace.com/academic/bp/bp_modes_chords/

The Bohlen-Pierce Site: BP Notation.(2024, Juli) huygens-fokker.org. https://www.huygens-fokker.org/bpsite/notation.html

Musik

Eminem (2013). *The Slim Shady LP.* [Explicit version]. Aftermath Entertainment/Interscope Records.

Knowles B. (2011). Love on Top. Columbia Records

Collier, J. (2019). Moon River. Hajanga Records.