Bachelorarbeit

im Studiengang Audiovisuelle Medien (AM7)

Digitale Audiosignalverarbeitung – Eine Einführung im Hinblick auf digitale Filterung im Selbstversuch

Vorgelegt von Jonas Keller (Matrikelnummer: 29419)

an der Hochschule der Medien

am 2. August 2018

zur Erlangung des akademischen Grades eines „Bachelor of Engineering“

Erstprüfer: Prof. Oliver Curdt

Zweitprüfer: Prof. Dipl.-Ing. Uwe Schulz

Ehrenwörtliche Versicherung

„Hiermit versichere ich, Jonas Keller, ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit mit dem Titel: „Digitale Audiosignalverarbeitung – Eine Einführung im Hinblick auf digitale Filterung im Selbstversuch“ selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Die Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen wurden, sind in jedem Fall unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht. Die Arbeit ist noch nicht veröffentlicht oder in anderer Form als Prüfungsleistung vorgelegt worden.

Ich habe die Bedeutung der ehrenwörtlichen Versicherung und die prüfungsrechtlichen Folgen (§ 26 Abs. 2 Bachelor-SPO (6 Semester), § 24 Abs. 2 Bachelor-SPO (7 Semester), § 23 Abs. 2 Master-SPO (3 Semester) bzw. § 19 Abs. 2 Master SPO (4 Semester und berufsbegleitend) der HdM) einer unrichtigen oder unvollständigen ehrenwörtlichen Versicherung zur Kenntnis genommen.“

Stuttgart, 2. August 2018 ________________

Jonas Keller

Kurzfassung

Diese Abschlussarbeit befasst sich mit einer Heranführung an die Thematik der digitalen Audiosignalverarbeitung. Der Leser erhält zunächst eine grundsätzliche Themeneinordnung. Einen Großteil nimmt dann die Erläuterung der für die Signalverarbeitung benötigten mathematischen sowie signal- und systemtheoretischen Grundlagen ein. Dazu werden Fourier-Reihen und Fourier-Transformation, Laplace-Transformation und z-Transformation eingeführt. Ergänzt werden diese Erläuterungen durch Berechnungs- und Anwendungsbeispiele. Anschließend werden anhand der Einführungen digitale Systeme beschrieben. Die digitale Filterung und der digitale Filterentwurf bauen auf den vorangegangenen Kapiteln auf und demonstrieren die praktische und zielorientierte Umsetzung der eingeführten Grundlagen. Die visuelle Aufbereitung der einzelnen Themenschwerpunkte erfolgt mithilfe von MATLAB.

Abstract

This thesis deals with an introduction to digital audio signal processing. The reader initially gets a general overview of the topic. A bigger part of this thesis focuses on the explanation of the required mathematical as well as signal and system theoretic basics for signal processing. For this purpose, Fourier series, Fourier transform, Laplace transform and z-transform are introduced. Examples of calculation and implementation complete the explanations. Following this, on the basis of the introduction chapters digital systems get characterized. Based on this, digital filtering and digital filter design demonstrate the targeted implementation of the explained fundamentals in practice. The subjects contained in this thesis get illustrated by the use of MATLAB.

Inhaltsübersicht

Abbildungsverzeichnis

Symbolverzeichnis

a_0, a_k, b_k	Fourier-Koeffizienten, Systemkoeffizienten LTI-System
$\mathbb{C}$	Komplexe Zahlenebene
$\delta(t)$	(Diracsche) Deltafunktion
f	Frequenzvariable
f_0 bzw. F_0	Grundfrequenz, über den Faktor 2π mit der Grundkreisfrequenz ω_0 folgendermaßen verknüpft: $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T_0}$
f_b	Bandbreite
f_c bzw. f_g	Grenzfrequenz bzw. Cut-Off-Frequenz (3dB-Grenzfrequenz)
f_m	Mittenfrequenz
f_o	obere Grenzfrequenz
f_s bzw. F_s	Abtastfrequenz/Sampling-Frequenz $f_s = \frac{1}{T_s}$
f_u	untere Grenzfrequenz
$\mathcal{F}\{x(t)\}$	Fourier-Transformierte der Funktion $x(t)$, Fourier-Transformationsoperator $\mathcal{F}$
$\mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$	(Fourier-)Rücktransformierte der Bildfunktion $X(f)$
G	Verstärkungsfaktor (Gain)
$h(k)$	Impulsantwort eines FIR-Filters
$H(f)$	Frequenzantwort
$H(z)$	z-Übertragungsfunktion, $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$
j	imaginäre Einheit, die $j^2 = -1$ genügt
$\mathcal{L}\{x(t)\}$	Laplace-Transformierte der Funktion $x(t)$, Laplace-Transformationsoperator $\mathcal{L}$
$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$	(Laplace-)Rücktransformierte der Bildfunktion $X(s)$
m	Diskreter Zeitindex
$O(\ldots)$	O-Notation zur Darstellung der Komplexität eines Algorithmus
$\mathbb{R}$	Bereich der reellen Zahlen
T_0	Grundperiodendauer; $T_0 = \frac{1}{f_0}$
T_s	Dauer der Abtastperiode $T_s = \frac{1}{f_s}$
$u_a(t)$	Ausgangsspannung
$u_e(t)$	Eingangsspannung
ω_0	Grundkreisfrequenz; über den Faktor 2π mit der Grundfrequenz f_0 folgendermaßen verknüpft: $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$w(m)$	Fenster, zeitdiskret
$W(f)$	Fenster im Bildbereich, $W(f) = \mathcal{F}\{w(m)\}$
$x(m)$	(Eingangs-)Signal (zeitdiskret)
$x(t)$	Signal (zeitkontinuierlich)
$X(f)$	Fourier-Transformierte einer Zeitfunktion
$X(s)$	Laplace-Transformierte einer Zeitfunktion
$X(z)$	z-Transformierte des zeitdiskreten Signals $x(m)$
$y(m)$	(Ausgangs-)Signal (zeitdiskret)
$Y(z)$	z-Transformierte des zeitdiskreten Signals $y(m)$
z	Komplexe Zahl $z = x + jy$ mit $x = Re(z)$ als Realteil und y= $Im(z)$ als Imaginärteil von z
$\mathcal{Z}\{x(m)\}$	z-Transformierte des zeitdiskreten Signals $x(m)$, z-Transformationsoperator $\mathcal{Z}$
$\circ\!\!-\!\!\bullet$	Korrespondenzzeichen vom Zeit- zum Bildbereich
$\bullet\!\!-\!\!\circ$	Korrespondenzzeichen vom Bild- zum Zeitbereich

Abkürzungsverzeichnis

AES/EBU	Audio Engineering Society/European Broadcast Union à digitale Schnittstelle zur Signalübertragung
AM7	Bachelorstudiengang Audiovisuelle Medien, 7 Semester
AUX	*auxiliary*, „hilfs-, neben-“ à Ausgang/Eingang zur Erweiterung
Bit	Binärstelle
DFT	Diskrete Fourier-Transformation
DSP	Digitaler Signalprozessor
FFT	Fast Fourier Transform
FIR	*finite impulse response*, endlich lange Impulsantwort
HdM	Hochschule der Medien Stuttgart
Hz	„Hertz“ à Einheit der Frequenz
IIR	*infinite impulse response*, unendlich lange Impulsantwort
LTI-System	Lineares, zeitinvariantes System (LTI ≙ *linear, time-invariant*)
MADI	Multi Channel Audio Digital Interface à digitale Schnittstelle zur Signalübertragung

1 Einführung

Diese Arbeit befasst sich im Kern mit einer Heranführung an die Thematik der digitalen Audiosignalverarbeitung. Zunächst werden die hierfür benötigten mathematischen sowie signal- und systemtheoretischen Grundlagen erläutert. Darauf aufbauend wird anschließend der Bereich der digitalen Filterung betrachtet. Den Rahmen der Arbeit bildet die Frage, inwieweit eine intensive Auseinandersetzung und Ausarbeitung des Themas in der begrenzten Bearbeitungszeit einer Bachelor-Thesis möglich ist – dies wird abschließend in einer Machbarkeitsanalyse dargelegt.

1.1 Zielsetzung

Ziel dieser Arbeit ist es, ein grundlegendes und tiefgehendes Verständnis über die digitale Audiosignalverarbeitung zu vermitteln. Hierzu sollen nicht etwa vordefinierte Formeln, Funktionen und Programme angewandt werden. Vielmehr wird an die mathematisch-theoretischen Grundlagen des Lehrangebots der HdM (im Bachelorstudiengang AM7 mit Schwerpunkt Tontechnik) angeknüpft, um zunächst die fundamentalen Werkzeuge zur Signalverarbeitung herzuleiten und verständlich zu dokumentieren. Die grafische Darstellung mathematischer oder audiotechnischer Zusammenhänge erfolgt mithilfe von MATLAB. (Zur MATLAB-Umsetzung wurden folgende Quellen benutzt: (Werner 2009), (MathWorks 2018))

Diese größtenteils theoretische Ausarbeitung soll die vermittelten Inhalte der HdM weiter vertiefen und zu den bereits bekannten praktischen Umsetzungen aus dem Studium den methodischen Hintergrund liefern. Hierdurch soll eine Brücke geschlagen werden zwischen Anwendungsebene (Nutzen von z. B. Plug-Ins, Effekten oder Filtern im Tonstudiobereich) und Entwicklungsebene (z. B. Plug-In-Entwurf, Mischpultherstellung oder DSP-Programmierung).

Zur anschaulichen Umsetzung der signal- und systemtheoretischen Grundlagen soll die digitale Filterung betrachtet und erläutert werden. Diese ist ein wichtiges und alltäglich eingesetztes technisches und gestalterisches Werkzeug im Tonstudiobereich und wird deshalb hier thematisiert.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf dem Gebiet der Tontechnik – die digitale Signalverarbeitung ist jedoch ein weit darüber hinausgehender Themenbereich mit zahlreichen Anwendungen.[1] Es ist dennoch nicht Ziel dieser Ausarbeitung, diesen Bereich vollständig zu umfassen.

1.2 Themeneinordnung

Anwendung findet die digitale Audiosignalverarbeitung allgemein in elektronischen Geräten, die Audiomaterial digital aufnehmen, abspielen und mindestens rudimentär beeinflussen können (z. B. Equalizer-Einstellungen, Schnittmöglichkeiten am Diktiergerät). Dies betrifft alle Consumer-Geräte zur Musikwiedergabe und -aufnahme. Im Homestudiobereich übernehmen Laptops bzw. PCs die digitale Bearbeitung. Im professionellen Tonstudiobereich finden sich dagegen oftmals (zusätzlich zur Bearbeitung am Computer) digitale Mischpulte, die als zentrales Bearbeitungselement die Signalverkettung und -zusammenführung übernehmen (siehe Abbildung 1).

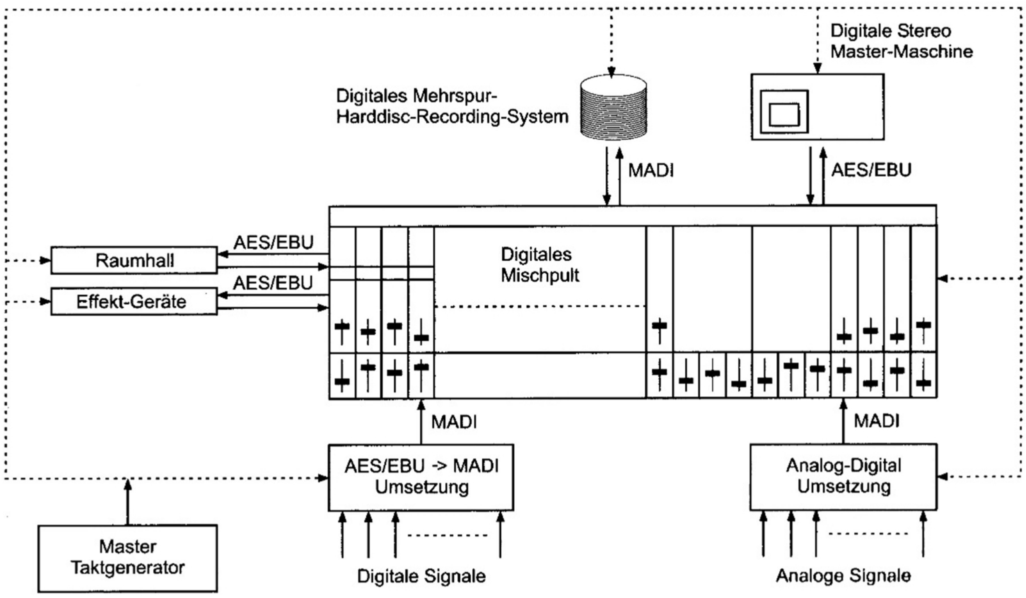


Abbildung 1: Digitales Tonstudio (Zölzer 2005) S. 2

Sowohl digitale als auch analoge Signale (letztere nach Analog-Digital Umsetzung) werden dem Mischpult über Schnittstellen (hier AES/EBU und MADI) zur Verfügung gestellt. Weitere Peripheriegeräte wie Hall und sonstige Effekte können vom Mischpult aus angesteuert werden. Die Speicherung der einzelnen Signale übernimmt das digitale Mehrspur-Harddisc-Recording-System (ein Computer, der mit entsprechender Soft- und Hardware für Konnektivität und Aufzeichnung ausgestattet ist), eine Stereo-Summe wird eventuell über eine

[1] (Vaseghi 2007) Kapitel 1, S. 3-24

digitale Stereo-Master-Maschine ausgegeben oder ebenfalls auf das Mehrspur-Recording-System aufgezeichnet. Die Synchronität der Geräte ist durch einen Master-Taktgenerator, auch Wordclock genannt, gewährleistet.[2]

Betrachtet man nun einen einzelnen Tonkanal eines digitalen Tonmischpults, so finden sich stets die gleichen Elemente (siehe Abbildung 2). Ein Filtersystem (FIL) wird zur Veränderung und Gestaltung des Klangs eines Signals genutzt. Ein Dynamiksystem (DYN) beeinflusst dessen Dynamikumfang und Lautheit. Ein Verzögerungssystem (DEL) lässt die zeitliche Verzögerung des Signals zu (beispielsweise in Samples oder in Metern). Der Lautstärkefader (GAIN) beeinflusst den Signalpegel und die Panoramaeinstellung (PAN) lässt eine Gewichtung der Signalanteile auf rechten und linken Stereokanal zu.[3] Die zusätzlichen Insert-Send- und Return-Wege dienen zur Einschleifung von Effektgeräten, die AUX-Send-Outputs sind GAIN- bzw. PAN-unabhängige Ausgänge, z. B. zur Ansteuerung eines Hallgeräts.

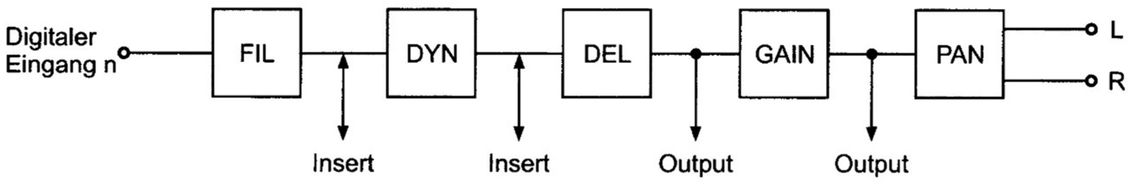


Abbildung 2: Tonkanal (Zölzer 2005) S. 4

Ebendiese Bearbeitungsmöglichkeiten im Tonkanal eines Mischpultes und die dazugehörige Signaldarstellung sind Hauptbestandteil dieser Arbeit.

[2] (Zölzer 2005) S. 2-3
[3] (Zölzer 2005) S. 3-4

2 Signal- und systemtheoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Begriffe Signal und System erläutert und in Zusammenhang gebracht. Weiterhin wird kurz die Analog-Digital-Umsetzung thematisiert, um ein anschauliches Verständnis über die Diskretisierung eines kontinuierlichen Signals und das daraus resultierende digitale Signal zu vermitteln.

2.1 Grundbegriffe

2.1.1 Signale

Definition:

> *„Unter einem Signal versteht man den zeitlichen Verlauf einer beobachteten Größe, die eine für den Betrachter relevante Information enthält.“* [4]

Beobachtete Größen können unterschiedlich aussehen:

- Temperatur
- Spannung und Strom
- Schalldruck
- Elektromagnetische Wellen (Licht, Strahlung)

Ein Signal kann von einer oder mehreren Variablen abhängen – so sind z. B. Bildsignale von zwei Ortsvariablen abhängig, Videosignale darüber hinaus von einer zweidimensionalen Fläche ergänzt um eine Zeitkomponente. Audiosignale dagegen werden durch Funktionen der Zeit dargestellt, sie sind also von *einer* Variablen abhängig.[5]

Die physikalische Entstehung eines Signals beinhaltet den *kontinuierlichen* Verlauf der beobachteten Größe. Kontinuierliche, analoge Audiosignale können so jeden beliebigen Wert

[4] (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 4
[5] (Vaseghi 2007) S. 4

annehmen – innerhalb physikalischer und technischer Grenzen. Man spricht von zeit- und wertkontinuierlichen Signalen.

Die mathematische Darstellung eines Signals erfolgt durch reell- oder komplexwertige Funktionen abhängig von der Zeit, die durch eindeutige Zuordnungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ bzw. nach $\mathbb{C}$ beschrieben werden.[6]

2.1.2 Systeme

Ein System lässt sich als Einrichtung verstehen, welches auf ein Signal am Systemeingang $x(t)$ mit einem Ausgangssignal $y(t)$ reagiert.[7]

Beispielsweise kann ein Spannungsteiler als System betrachtet werden. Dieser wird durch eine Eingangsspannung $u_e(t)$ gespeist, die Ausgangsspannung $u_a(t)$ lässt sich mithilfe der „Spannungsteiler-Regel“ angeben.

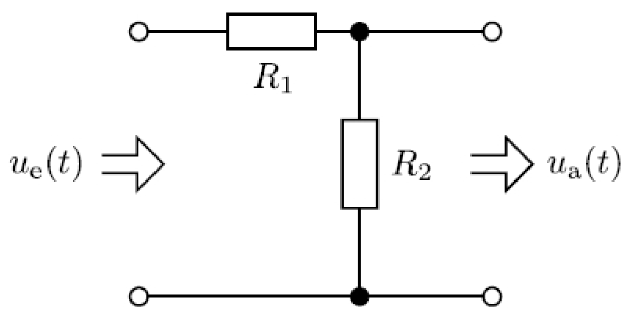


Abbildung 3: Spannungsteiler (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 5

Es gilt:

$$\frac{u_a(t)}{u_e(t)} = \frac{R_2 * I}{(R_1 + R_2) * I} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{1}$$

$$u_a(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} * u_e(t) \tag{2}$$

Der Spannungsteiler überführt also die Eingangsspannung $u_e(t)$ in die Ausgangsspannung $u_a(t)$. Beeinflusst wird die Spannung am Ausgang durch die Werte der Widerstände R_1 und R_2, beschrieben durch Gleichung (2).[8]

Ziel der Signalverarbeitung ist dann letztendlich die gezielte Bereitstellung von Systemen, um eine kontrollierte Beeinflussung der vorkommenden Signale zu ermöglichen.

[6] (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 4
[7] (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 4
[8] (Dössel 2011) S. 15

2.2 Analog-Digital-Umsetzung

Zur Weiterverarbeitung durch numerische Rechenprozesse muss ein zeit- und wertkontinuierliches, analoges Signal in anderer Form vorliegen. Eine regelmäßige Abtastung des Signals und die Umwandlung dieser abgetasteten Werte in Zahlenwerte liefert eine zeit- und wertdiskrete Zahlenfolge, das Signal ist „gesampelt".[9] Diese sogenannte Analog-Digital-Umsetzung/Diskretisierung unterteilt sich in die Schritte Abtastung und Quantisierung. Die Digital-Analog-Wandlung dagegen befasst sich mit der Signalrekonstruktion.

2.2.1 Abtastung

Zur Abtastung wird mathematisch betrachtet das Analogsignal $x(t)$ mit einer Abtastfunktion $s(t)$ multipliziert (vgl. Abbildung 4). Die Abtastfunktion besteht aus äquidistanten Nadelimpulsen mit dem Wert „1", zu allen anderen Zeitpunkten beträgt der Funktionswert „0". Die Zeitdauer zwischen zwei Abtastzeitpunkten beschreibt die Dauer einer Abtastperiode T_s, deren Kehrwert nach $f_s = \frac{1}{T_s}$ die Abtastfrequenz f_s (sampling frequency, sampling rate). Aus dieser Multiplikation ergibt sich ein zeitdiskretes Signal $x(nT)$, das die noch wertkontinuierlichen Funktionswerte des analogen Ursprungssignals zu den Abtastzeitpunkten enthält.[10]

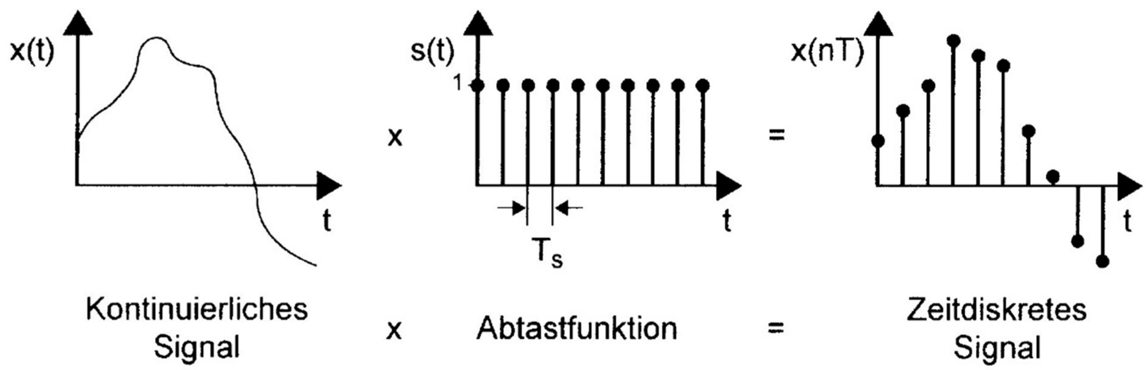


Abbildung 4: Erzeugung einer zeitdiskreten Funktion durch Abtastung (Dickreiter, et al. 2014) S. 664

Die Sampling-Frequenz f_s ist dabei stets so zu wählen, dass das Abtasttheorem nach Shannon erfüllt ist: „Das Originalsignal kann nur dann fehlerfrei aus einem abgetasteten Signal rekonstruiert werden, wenn die Abtastfrequenz größer als die doppelte höchste vorkommende

[9] (Dickreiter, et al. 2014) S. 663
[10] (Dickreiter, et al. 2014) S.663-664

Frequenz f_{max} des Nutzsignals ist. Es gilt daher $f_s > 2f_{max}$."[11] Vom menschlichen Hörvermögen ausgehend (ca. 20Hz – 20kHz) sollte f_{max} also jenseits von 40kHz liegen. Im Audiobereich haben sich typische Sampling-Raten von 44,1kHz oder 48kHz etabliert.

2.2.2 Quantisierung

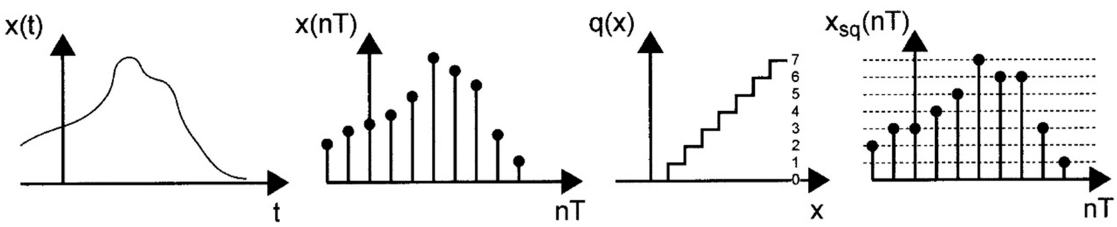


Abbildung 5: Generierung eines zeit- und wertdiskreten Signals (Dickreiter, et al. 2014) S. 668

Die Umsetzung der noch analogen Abtastwerte in diskrete, numerisch verarbeitbare Werte nennt sich Quantisierung. Der abgetastete Wert (aus $x(nT)$) wird mit einer gerasterten Skala von möglichen numerischen Werten ($q(x)$) verglichen und demjenigen Wert der Skala zugeordnet, der dem gemessenen am nächsten ist (siehe Abbildung 5). Die Rasterauflösung bestimmt die Genauigkeit, mit der das Signal abgebildet werden kann. Diese Auflösung wird Bittiefe genannt und in Bit angegeben. Ein Standard im Tonstudiobereich ist eine 24Bit-Bittiefe, dies entspricht 2^{24} möglichen Werten.[12]

[11] (Dickreiter, et al. 2014)S. 665
[12] (Dickreiter, et al. 2014) S. 668

3 Signale und Systeme

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit folgenden mathematischen Werkzeugen zur Signal- und Systemdarstellung: Fourier-Reihe, Fourier-Transformation, Laplace-Transformation, z-Transformation, LTI-Systeme.

3.1 Fourier-Reihen: Darstellung periodischer Funktionen

3.1.1 Heranführung

(2π-)Periodische, nichtsinusförmige Funktionen (z. B. Sägezahnimpuls, Rechteckimpuls) lassen sich nach Fourier aus sinusförmigen Basisschwingungen zusammensetzen und in eine unendliche trigonometrische Reihe entwickeln. Diese Reihendarstellung nennt man *Fourier-Reihe*, die Reihenentwicklung selbst *Fourier-Analyse*.[13]

Diese Reihe hat die Form

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\right) \qquad (3)^{14}$$

mit der Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ für 2π-periodische Funktionen.

Aus dieser Darstellung wird ersichtlich, dass sämtliche in der Reihe auftretende Kreisfrequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz ω_0 sind. Die Oberschwingungen, sog. *harmonische Teilschwingungen*, besitzen also diskrete Frequenzen. Die Anteile dieser Teilschwingungen am Gesamtsignal $x(t)$ werden über die *Fourier-Koeffizienten* a_k und b_k gewichtet. Diese Koeffizienten berechnen sich nach:

[13] (Papula 2009) S. 164
[14] (Furlan, DAS GELBE RECHENBUCH 3 2008) S. 155

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(k\omega_0 t)\, dt \quad (4)$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(k\omega_0 t)\, dt \quad (5)$$ [15]

Anstelle der trigonometrischen Funktionen als Basis-Bausteine der Fourier-Reihe kann man zur einfacheren Berechnung aus diesen eine komplexe Linearkombination gleichfrequenter Kosinus- und Sinusschwingungen ($x_3(t)$) bilden[16] und anschließend die Eulersche Formel ($e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$)[17] anwenden:

$x_1(t) = \cos(\omega_0 t)$

$x_2(t) = \sin(\omega_0 t)$

$x_3(t) = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t) = e^{j\omega_0 t}$ (vgl. (Vaseghi 2007) S. 27-28)

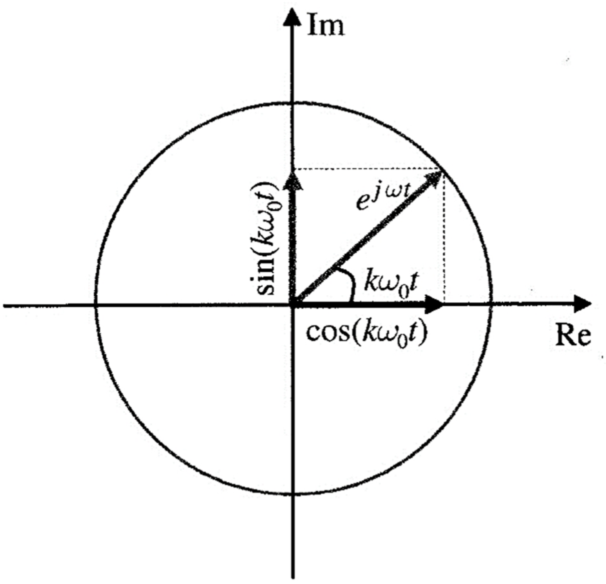


Abbildung 6: Komplexe Linearkombination in der komplexen Zahlenebene (Vaseghi 2007) S. 28

Abbildung 6 zeigt diese komplexe Linearkombination.

Die Grundfrequenz ω_0 ist auch in dieser komplexen Darstellung in Vielfachen von sich selbst vorhanden, die komplexen Basisfunktionen der Fourier-Reihe besitzen nun folgende Form:

$$\left[1, e^{\pm j\omega_0 t}, e^{\pm 2j\omega_0 t}, e^{\pm 3j\omega_0 t}, \ldots\right]$$ [18]

Das Spektrum der Koeffizienten c_k ist somit eine Funktion, die von der *diskreten* Variablen k abhängig ist, also ein Linienspektrum.[19]

Die komplexe Fourier-Reihe hat die Form:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, k = \cdots, -1, 0, 1, \ldots \quad (6)$$

[15] (Furlan, DAS GELBE RECHENBUCH 3 2008) S. 156
[16] (Papula 2009) S. 177-178
[17] (Merziger und Wirth 2010) S. 96
[18] (Vaseghi 2007) S.29
[19] (Papula 2009) S. 185

Der Koeffizient c_k errechnet sich durch:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt, \qquad k = \cdots, -1, 0, 1, \ldots \tag{7}$$ [20]

Die Herleitung der komplexen Darstellung der Fourier-Reihe bzw. -Koeffizienten kann dem Anhang entnommen werden (Nebenrechnung 1: Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe, Nebenrechnung 2: Komplexe Darstellung der Fourier-Koeffizienten).

Zusammenfassend entspricht die Berechnung der Fourier-Koeffizienten also der *Fourier-Analyse*. Das Zusammensetzen der einzelnen Koeffizienten mit den zugehörigen Frequenzen zur Fourier-Reihe entspricht der *Fourier-Synthese*.

3.1.2 Beispielrechnung: Periodische Rechteckfunktion[21]

Eine 2π-periodische Rechteckfunktion soll in eine Fourier-Reihe entwickelt werden. Die Funktionsgleichung lautet:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \pi \\ -1, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

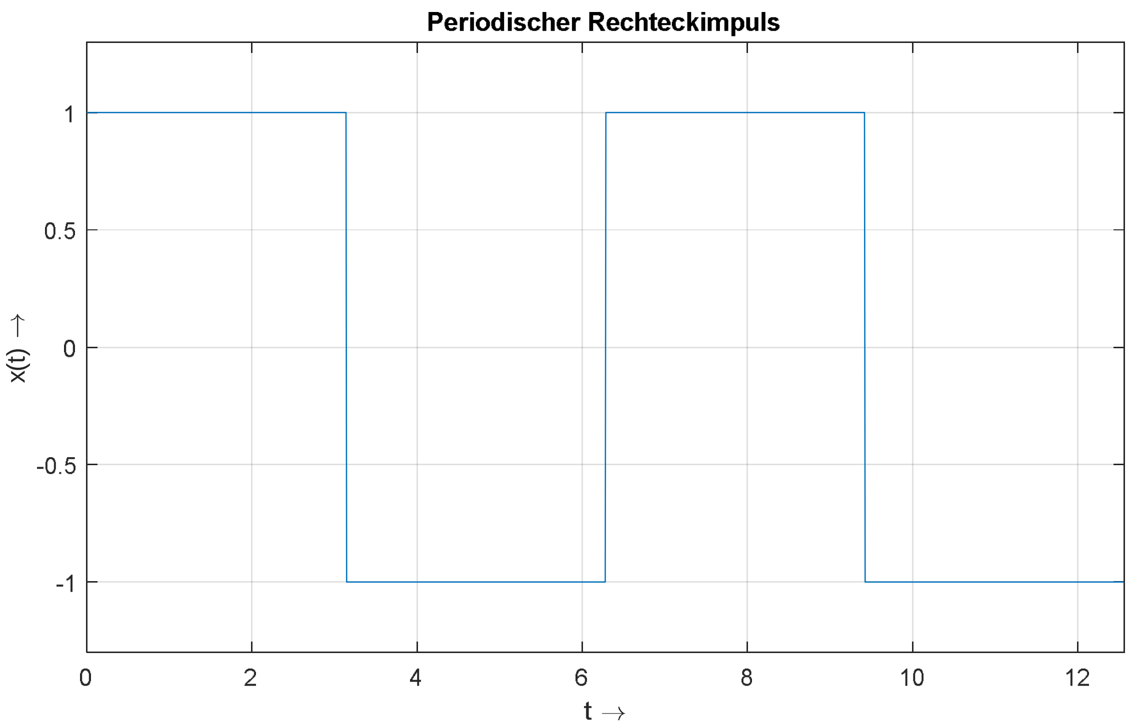


Abbildung 7: MATLAB-Code 1: PeriodischerRechteckimpuls

[20] (Furlan, DAS GELBE RECHENBUCH 3 2008) S. 157
[21] (Papula 2009) S. 171-174, 180-181

Abbildung 7 zeigt die Funktion $x(t)$. Ihre Entwicklung lautet nach der komplexen Form der Fourier-Reihe (6):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k berechnen sich nach (7), die Integration muss dabei abschnittsweise durchgeführt werden. Die Integrationsgrenzen dürfen aufgrund der Periodizität verschoben werden. $T_0 = 2\pi$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} 1 \cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-1)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt\right]$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} e^{-jk\omega_0 t}\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-jk\omega_0 t}\,dt\right]$$

Zu unterscheiden sind die Fälle $k = 0$ und $k \neq 0$:

1. Fall: $k = 0$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} e^0\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} e^0\,dt\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} 1\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} 1\,dt\right] = \frac{1}{2\pi}\left[[t]_0^{\pi} - [t]_{\pi}^{2\pi}\right]$$
$$= \frac{1}{2\pi}[(\pi - 0) - (2\pi - \pi)] = \frac{1}{2\pi}(\pi - \pi) = 0$$

2. Fall: $k \neq 0$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} e^{-jk\omega_0 t}\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-jk\omega_0 t}\,dt\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\left[\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\right]_{\pi}^{2\pi}\right]$$
$$= -\frac{1}{2\pi jk\omega_0}\left[\left[e^{-jk\omega_0 t}\right]_0^{\pi} - \left[e^{-jk\omega_0 t}\right]_{\pi}^{2\pi}\right]$$
$$= -\frac{1}{2\pi jk\omega_0}\left[e^{-jk\omega_0\pi} - e^0 - \left(e^{-jk\omega_0 2\pi} - e^{-jk\omega_0\pi}\right)\right]$$
$$= -\frac{1}{2\pi jk\omega_0}\left[e^{-jk\omega_0\pi} - 1 - e^{-jk\omega_0 2\pi} + e^{-jk\omega_0\pi}\right]$$
$$= -\frac{1}{2\pi jk\omega_0}\left[2e^{-jk\omega_0\pi} - e^{-jk\omega_0 2\pi} - 1\right] = \frac{j}{2\pi k\omega_0}\left[2e^{-jk\omega_0\pi} - e^{-jk\omega_0 2\pi} - 1\right]$$

Über die Eulersche Formel lassen sich die Summanden innerhalb der Klammern berechnen:

$$e^{-jk\omega_0\pi} = \cos(k\omega_0\pi) - j\sin(k\omega_0\pi) = \cos(k\omega_0\pi) = \begin{cases} 1, & k = gerade \\ -1, & k = ungerade \end{cases}$$

$$e^{-jk\omega_0 2\pi} = \cos(k\omega_0 2\pi) - j\sin(k\omega_0 2\pi) = 1 - 0j = 1$$

Man muss also noch die Fälle $k = gerade,\ k = 2n$ und $k = ungerade,\ k = 2n - 1$ unterscheiden:

$$c_{k=2n} = c_{2n} = \frac{j}{2\pi(2n)\omega_0}(2 \cdot 1 - 1 - 1) = 0$$

$$c_{k=2n-1} = c_{2n-1} = \frac{j}{2\pi(2n-1)\omega_0}(2 \cdot (-1) - 1 - 1) = \frac{j}{2\pi(2n-1)\omega_0} \cdot (-4) = -\frac{2j}{\pi(2n-1)\omega_0}$$
$$= -\frac{2j}{\omega_0 \pi} \cdot \frac{1}{2n-1}$$

Es treten folglich nur ungerade Fourier-Koeffizienten auf. Die Fourier-Reihe der periodischen Rechteckfunktion ergibt sich als

$$x(t) = -\frac{2j}{\omega_0 \pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j(2n-1)\omega_0 t}}{2n-1} = -\frac{2j}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j(2n-1)t}}{2n-1}$$

mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$, da es sich um eine 2π-periodische Funktion handelt. Durch Ausführen und Abbruch der Summenoperation erhält man folgende Näherungsfunktionen:

1. Näherung:

$$x_1(t) = -\frac{2j}{\pi} \sum_{n=0}^{1} \frac{e^{j(2n-1)t}}{2n-1} = \frac{2j}{\pi} e^{-jt} - \frac{2j}{\pi} e^{jt}$$

2. Näherung:

$$x_2(t) = -\frac{2j}{\pi} \sum_{n=-1}^{2} \frac{e^{j(2n-1)t}}{2n-1} = \frac{2j}{3\pi} e^{-3jt} + \frac{2j}{\pi} e^{-jt} - \frac{2j}{\pi} e^{jt} - \frac{2j}{3\pi} e^{3jt}$$

Die folgenden Abbildungen zeigen den Verlauf dieser Näherungen und den des periodischen Rechteckimpulses. Je mehr Reihenglieder aufsummiert werden, desto besser gelingt die Approximation.[22]

[22] (Papula 2009) S. 173

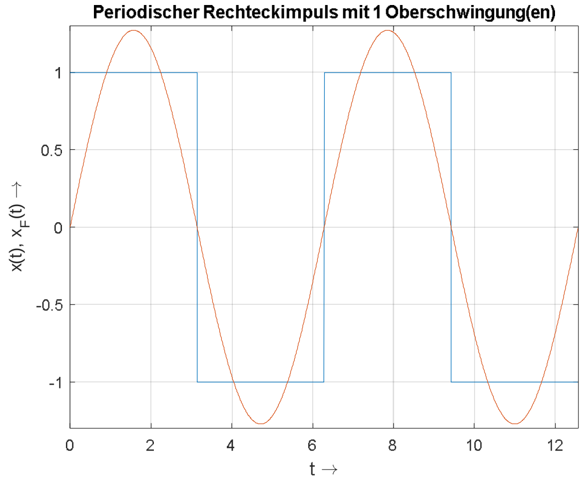


Abbildung 8: Rechteckimpuls - 1. Näherung

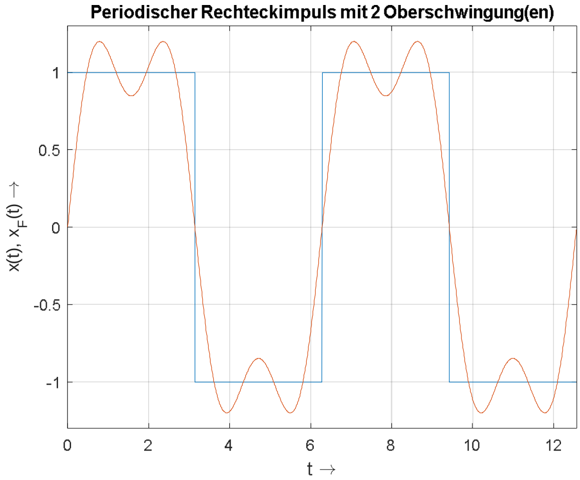


Abbildung 9: Rechteckimpuls - 2. Näherung

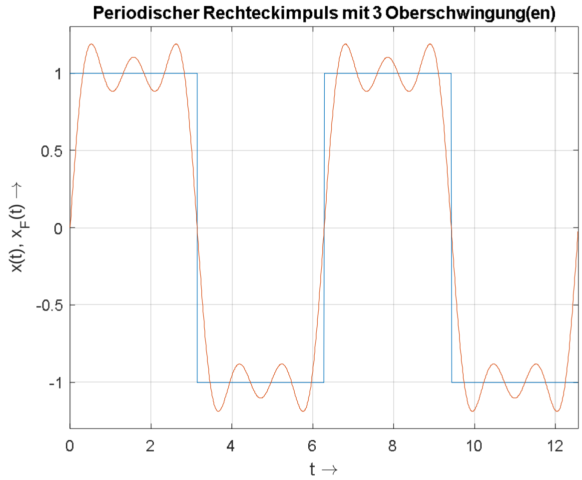


Abbildung 10: Rechteckimpuls - 3. Näherung

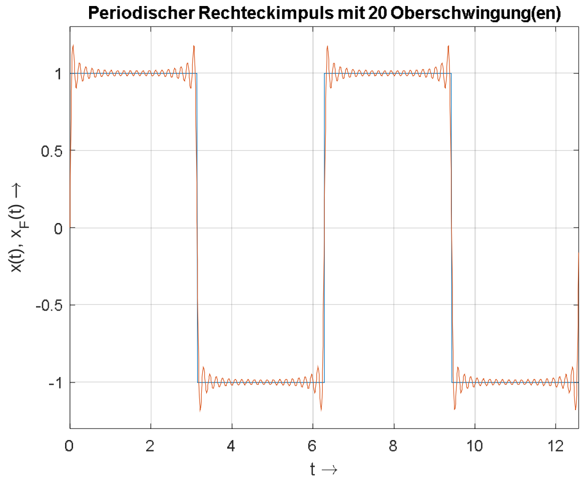


Abbildung 11: Rechteckimpuls - 20. Näherung

Der in Abbildung 11 deutlich sichtbare Überschwinger (mit einem Anteil von von ca. 9%) ist durch das Gibbs'sche Phänomen begründet und tritt an Sprungstellen der zu transformierenden Funktion auf.[23] Der zugehörige Programmcode ist im Anhang zu finden, siehe MATLAB-Code 2: PeriodischerRechteckimpuls_FourierSynthese.

---

[23] (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 118

3.2 Fourier-Transformation

3.2.1 Heranführung

Die Reihenentwicklung eines periodischen Signals in eine Fourier-Reihe wurde im vorherigen Kapitel (3.1 Fourier-Reihen: Darstellung periodischer Funktionen) einleitend behandelt. Periodische Signale werden dabei durch Überlagerung von harmonischen Schwingungen dargestellt. Die Kreisfrequenzen dieser Oberschwingungen sind dabei ganzzahlige Vielfache der Grundkreisfrequenz ω_0 (à $\omega_n = n \cdot \omega_0$). In diesem Kapitel wird nun die Fourier-Darstellung von nichtperiodischen Signalen betrachtet. Die Nicht-Periodizität eines Signals kann als Spezialfall eines periodischen Signals verstanden werden – als Signal mit unendlicher Periodendauer. Mit unendlicher Periodendauer wiederholt sich das Signal nicht und ist folglich nichtperiodisch.[24] Mathematisch wird ein Grenzübergang der Periodendauer nach unendlich durchgeführt: $T_0 \rightarrow \infty$. Die Frequenzauflösung[25] $\Delta f = \frac{1}{T_0}$ wird bei diesem Grenzübergang beliebig fein und geht damit gegen null.[26]

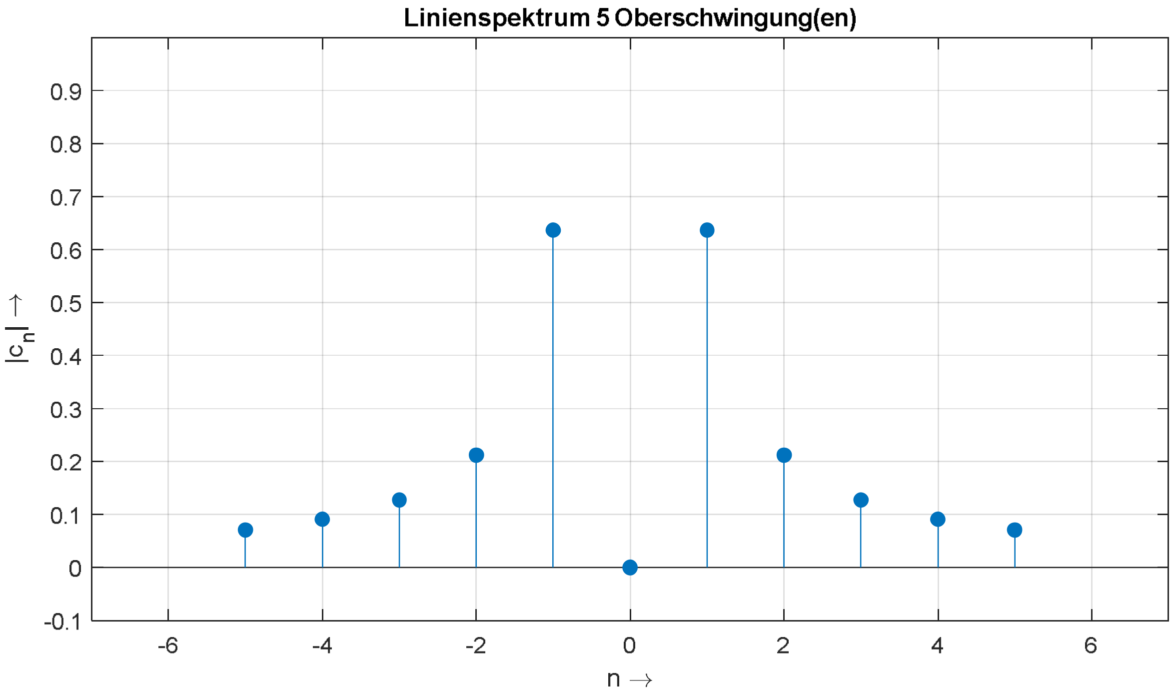


Abbildung 12: MATLAB-Code 3: PeriodischerReckteckimpuls_Linienspektrum

Das diskrete Linienspektrum (siehe Abbildung 12, zu Kapitel 3.1.2 Beispielrechnung: Periodische Rechteckfunktion) der Amplitudenanteile der Oberschwingungen aus der Fourier-

[24] (Vaseghi 2007) S. 33
[25] (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 86
[26] (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 88

Reihe wird also ebenfalls beliebig fein und im Grenzübergang zur unendlichen Periodendauer zu einem kontinuierlichen Spektrum. Dabei werden also zur Darstellung alle möglichen Kreisfrequenzen von $\omega = -\infty$ bis $\omega = +\infty$ benötigt. Das Summenzeichen aus der Fourier-Reihe geht nun über in die Form eines Integrals.

Die *Fourier-Transformation*, eine sogenannte *Integraltransformation*, bildet eine zeitabhängige, nichtperiodische Funktion $x(t)$ in eine frequenzabhängige Funktion $X(f)$ ab. Symbolisch wird dies geschrieben als

$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(f)$, $\quad X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, $\quad x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$

Die Transformationsvorschriften

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} \, dt \tag{8}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \, e^{j2\pi ft} \, df \tag{9}$$

Bilden vom Zeit- in den Frequenzbereich („Fourier-Transformation“) und umgekehrt („inverse Fourier-Transformation“) ab, die Fourier-Transformierte $X(f)$ einer Zeitfunktion $x(t)$ wird als deren zugehöriges *Spektrum* bezeichnet.

Die in Gleichung (9) dargestellte Form lässt sich mit der Darstellung der Fourier-Reihe (6) in Analogie bringen: Eine periodische Funktion $x(t)$ lässt sich nach Definition der Fourier-Reihe in eine unendliche Summe von harmonischen Schwingungen entwickeln. Diese besitzen als Frequenz ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz f_0, gewichtet über die Fourier-Koeffizienten. Eine ähnliche Struktur zeigt sich in Gleichung (9): Die nichtperiodische Funktion $x(t)$ ist hier aus harmonischen Schwingungen aller Frequenzen aufgebaut. Die Amplituden dieser einzelnen, kontinuierlichen Schwingungskomponenten sind anteilig gegeben durch die frequenzabhängige Funktion $X(f)$ mit ihren infinitesimalen Frequenzanteilen df. Die Summation dieser Teile führt zum Übergang von der Summe zum Integral.[27] [28]

Die Frequenz f kann in obigen Gleichungen (8) und (9) durch die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ ersetzt werden. Mit $d\omega = 2\pi \, df \rightarrow df = \frac{d\omega}{2\pi}$ ergeben sich folgende Fourier-Integrale:

[27] (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S.90
[28] (Papula 2009) S. 542

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt \qquad (10)^{29}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega \qquad (11)^{30}$$

Zur einfacheren Berechnung von Fourier-Transformationen und -Rücktransformationen existieren Transformationstabellen[31], deren aufgelistete Korrespondenzen zur gliedweisen Bestimmung des gesuchten Signals dienen.

3.2.2 Beispielrechnung: Spektrum eines Rechteckimpulses[32]

Es sei $x(t)$ ein Rechteckimpuls (Abbildung 13) der Form

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq w \\ 0, & |t| > w \end{cases}$$

Anwenden von Gleichung (10) liefert für $\omega \neq 0$:

$$X(\omega) = \int_{-w}^{w} 1 \cdot e^{-j\omega t}\,dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-w}^{w}$$

$$= -\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{-w}^{w}$$

$$= \frac{1}{j\omega}\left(e^{j\omega w} - e^{-j\omega w}\right)\ldots$$

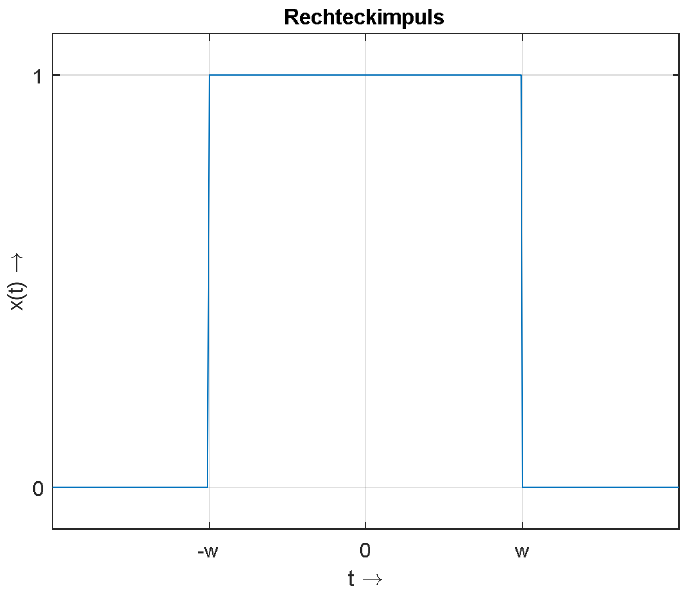


Abbildung 13: MATLAB-Code 4: Rechteckimpuls

Über die Euler-Darstellung der Trigonometrischen Funktionen[33]

$$\sin(z) = \frac{1}{2j}\left(e^{jz} - e^{-jz}\right)$$

erhält man hieraus:

$$\ldots = \frac{2j \cdot \sin(\omega w)}{j\omega} = \frac{2 \cdot \sin(\omega w)}{\omega} = 2w\frac{\sin(\omega w)}{\omega w} = 2w \cdot \mathrm{sinc}(\omega w), \qquad \omega \neq 0$$

---

[29] (Papula 2009) S. 544
[30] (Papula 2009) S. 549
[31] (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 388
[32] (Papula 2009) S. 546-547
[33] (Furlan, DAS GELBE RECHENBUCH 3 2008) S. 128

Für $\omega = 0$ ergibt sich:

$$X(\omega) = \int_{-w}^{w} 1 \cdot e^{-j0t}\, dt = \int_{-w}^{w} 1\, dt = [t]_{-w}^{w} = w - (-w) = 2w$$

Das Ergebnis für die Fourier-Transformierte lautet also:

$$X(\omega) = \begin{cases} \frac{2 \cdot \sin(\omega w)}{\omega}, & \omega \neq 0 \\ 2w, & \omega = 0 \end{cases}$$

Diese Bildfunktion ist in Abbildung 14 dargestellt. Das zugehörige *Amplitudenspektrum* $A(\omega)$ errechnet sich aus dem Betrag der Bildfunktion und ist im selben Bild sichtbar:

$$A(\omega) = |X(\omega)| = \left|\frac{2 \cdot \sin(\omega w)}{\omega}\right|$$

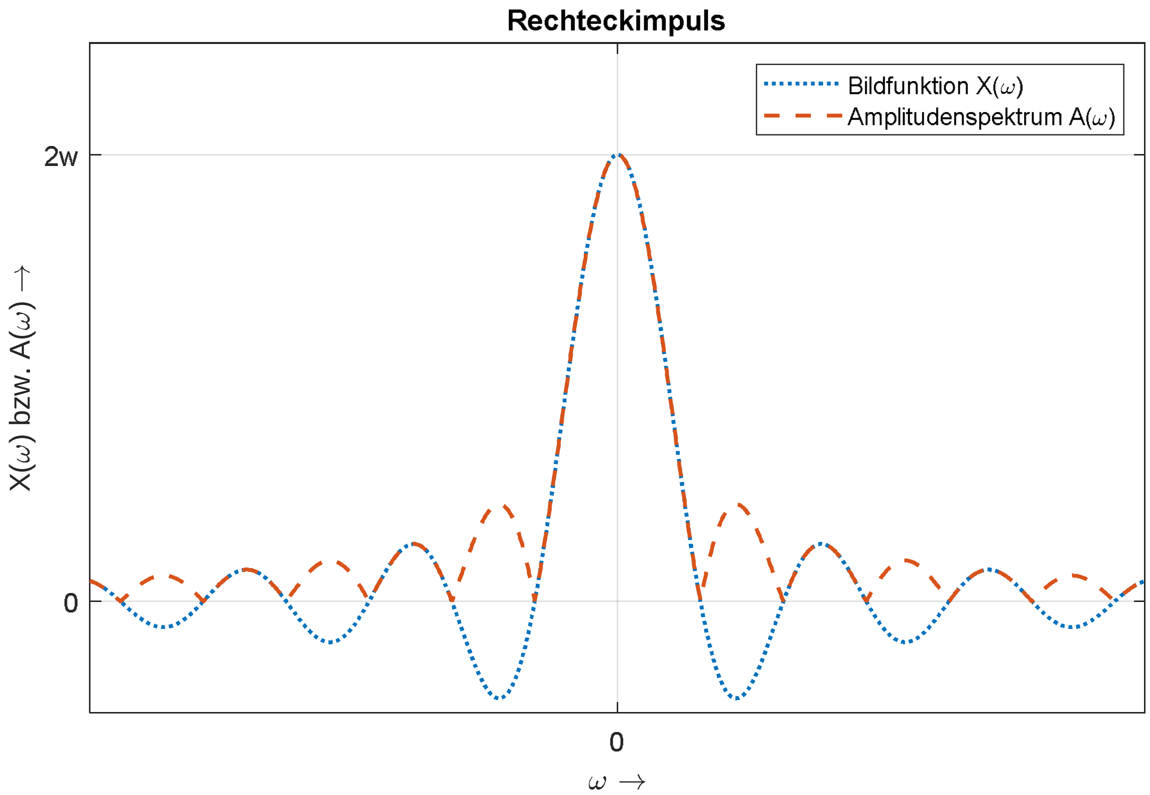


Abbildung 14: MATLAB-Code 5: RechteckimpulsBildfunktion

3.2.3 Beispielrechnung: Spektrum einer Impulsfunktion

Um ein System bzw. die Reaktion eines Systems auf ein Eingangssignal zu beschreiben, wird häufig der Begriff „Impulsantwort“ benutzt. Dieser beschreibt, wie ein System auf einen am Eingang anliegenden Impuls „antwortet“. Dieser Impuls wird über eine sogenannte *(Diracsche) Deltafunktion* (δ-Funktion, Dirac-Stoß, Impulsfunktion, siehe Abbildung 16) definiert. Anschaulich geht man von einem Rechteckimpuls mit der Impulsbreite a und der Impulsstärke 1 (Flächeninhalt unter der Rechteckfunktion) aus. Die Impulsbreite a wird bei gleichbleibender Fläche immer weiter verringert, daraus ergibt sich eine zunehmende Höhe des Impulses (siehe Abbildung 15). Im Grenzübergang $a \rightarrow 0$ wird die Höhe unendlich groß, die Impulsbreite liegt allerdings nahe null. Die Fläche unter der Funktion bleibt dennoch 1. Symbolisch kann man dies schreiben als[34]:

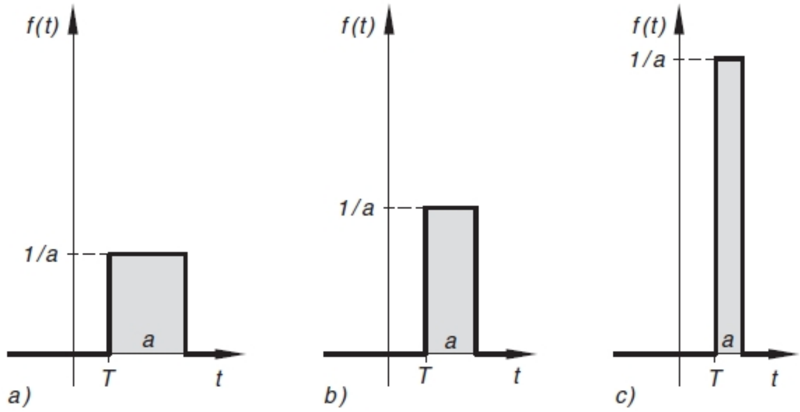


Abbildung 15: Impulse der Stärke 1 mit abnehmender Impulsbreite (Papula 2009) S. 563

$$\delta(t-T) = \begin{cases} 0, & t \neq T \\ \infty, & t = T \end{cases}$$

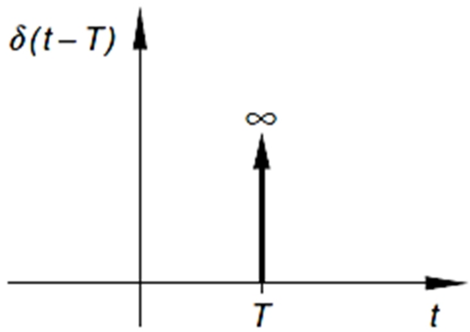


Abbildung 16: Diracsche Deltafunktion (Papula 2009) S. 564

Man kann sich sämtliche Signale als Kombination aus endlichen oder unendlichen gewichteten und verschobenen Deltafunktionen vorstellen. Hieraus ergibt sich die folgende Sampling-Eigenschaft der Deltafunktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-T)\,dt = x(T)$$

Dieses Integral liefert also ein Sample des Signals $x(t)$ zum Zeitpunkt T. Die Fourier-Transformation der Diracschen Deltafunktion ergibt sich also zu[35]:

[34] (Papula 2009) S. 562-564
[35] (Vaseghi 2007) S. 36

$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft}\, dt = e^{0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

mit $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$, wegen des Flächeninhalts von 1.

Das Spektrum der Impulsfunktion (Abbildung 17) enthält also alle Frequenzen zu gleichen Anteilen.

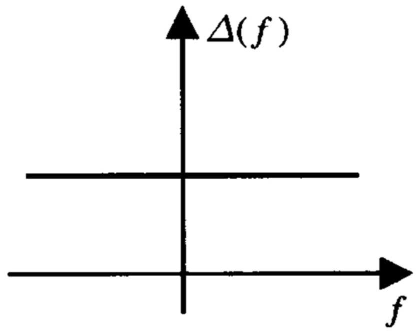


Abbildung 17: Spektrum Deltafunktion (Vaseghi 2007) S. 36

3.2.4 Diskretisierung der Fourier-Transformation[36]

Nach 3.2.3 Beispielrechnung: Spektrum einer Impulsfunktion kann ein gesampeltes (also aus zeitdiskreten Werten bestehendes) Signal $x(m)$ als Kombination aus gewichteten und zeitlich verschobenen Deltafunktionen dargestellt werden; m sei im Folgenden ein Faktor für diskrete Zeitpunkte, T_s die Abtastperiode:

$$x(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - mT_s)$$

Die Fourier-Transformierte dieses Signals ergibt sich nach (8) als:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - mT_s)e^{-j2\pi ft}\, dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - mT_s)e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT_s)e^{-j2\pi mfT_s} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j2\pi mf}, \qquad mit\ T_s = 1$$

Die inverse Fourier-Transformation im Zeitdiskreten lautet:

$$x(m) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X_s(f)e^{j2\pi fm} df$$

mit den Integrationsgrenzen $-{}^{F_s}\!/_2 \leq f \leq {}^{F_s}\!/_2$ und wegen T_s = 1 gilt auch F_s = 1.

In der digitalen Signalverarbeitung wird zusätzlich zur Zeitdiskretisierung des Ursprungssignals $x(t)$ eine Fensterung vorgenommen, die das gesampelte Signal in

[36] (Vaseghi 2007) S. 47-51

Abschnitte der Länge N Samples unterteilt. Obige Reihendarstellung erfährt also eine Einschränkung in ihren Laufgrenzen:

$$X(f) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{-j2\pi mf}$$

Der letzte Schritt ist nun eine Diskretisierung der Frequenzen über

$$X(k) = X(f)\delta\left(f - \frac{k}{N}F_s\right)$$

Der Faktor k beschreibt die k-fache Abtastfrequenz, es folgt durch Einsetzen dieser weiteren Modifikation ein zeitdiskretes, gefenstertes Signal in diskreter Frequenzauflösung, die sogenannte Diskrete Fourier-Transformation (DFT):

$$X(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}$$

Vergleicht man nun diese Darstellung der DFT mit der komplexen Darstellung der Fourier-Koeffizienten (7) mit T_0 = 1 und ω_0 = $2\pi f_0$ = 2π,

$$c_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x(t)e^{-j2\pi kt}\,dt$$

so lässt sich feststellen, dass der k-te DFT-Koeffizient $X(k)$ mit dem k-ten Fourierkoeffizienten c_k übereinstimmt, sofern:

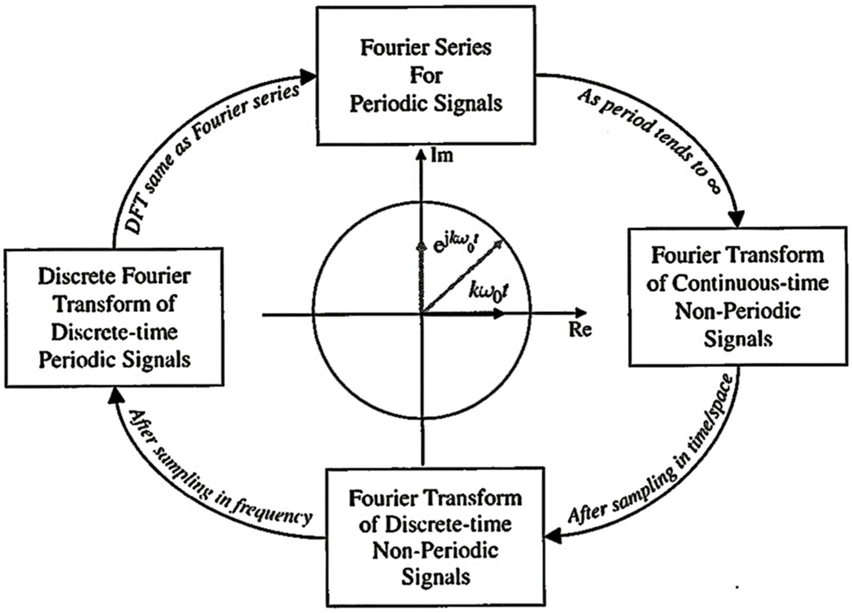


Abbildung 18: Zusammenhang zwischen Fourier-Reihe, -Transformation und DFT (Vaseghi 2007) S. 50

- $x(t)$ in diskreter Form als $x(m)$ vorliegt und damit das Integralsymbol durch ein Summenzeichen ersetzt werden kann
- $x(m)$ durch die Fensterung als periodisch über N Samples angesehen wird

Die DFT von N Samples eines Signals stimmt also mit der Fourier-Reihe eines N-periodischen Signals überein. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 18 dargestellt.

Die in der Audiosignalverarbeitung bekannte und häufig erwähnte Fast Fourier Transform (FFT) ist eine laufzeitoptimierte Implementierung der DFT mit reduzierter Komplexität und findet wegen ihrer Effizienz in zahlreichen Plug-Ins und Bearbeitungstools ihre Anwendung (Analyzer, Spektrogramm, digitale Filter, Pitch-Veränderung). Die DFT über N Elemente wird dabei in kleinere Transformationsblöcke bis $N = 2$ aufgespaltet. Für z. B. $N = 256$ müssen bei einer DFT $256 \cdot 255 = 65{,}280$ komplexe Multiplikationen und ebenso viele komplexe Additionen ausgeführt werden (siehe Reihendarstellung der DFT, Komplexität $O(N^2)$). Bei Anwendung der FFT reduziert sich der Rechenaufwand auf $128 \cdot log_2 128 = 896$ komplexe Multiplikationen und $256 \cdot log_2 256 = 2048$ komplexe Additionen (Komplexität $O(N \log(N))$).[37]

3.3 Laplace-Transformation

3.3.1 Heranführung

Die *Laplace-Transformation* ordnet einer zeitabhängigen Funktion $x(t)$ eine Bildfunktion $X(s)$ zu. Die Fourier-Transformation nimmt eine ähnliche Zuordnung vor, sie geht von einem stationären Signal aus (d. h. die Frequenzanteile sind über die Zeit unveränderlich, die Bildfunktion $X(f)$ enthält stationäre Sinus- und Kosinus-Anteile mit zeitinvarianten Frequenzen, Amplituden und Phasen). In Ergänzung dazu können mithilfe der Laplace-Transformation nicht-stationäre Signale aus anschwellenden, gleichbleibenden und abklingenden Sinussignalen modelliert werden. Dazu wird der Integrand der Fourier-Transformation um den Faktor $e^{-\delta t}$ erweitert. Dieser strebt für größer werdende t und $\delta > 0$

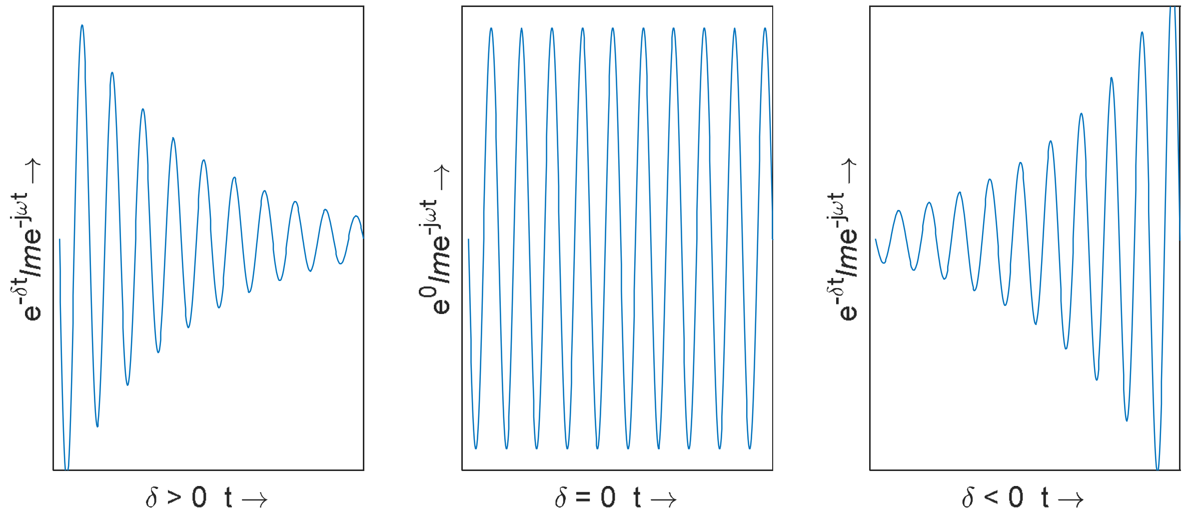


Abbildung 19: MATLAB-CODE 6: BasisLaplace

[37] (Vaseghi 2007) S. 59-61

gegen null, bleibt konstant für $\delta = 0$ und wächst für $\delta < 0$ (siehe Abbildung 19).[38] Die komplexe *Laplace-Variable* s setzt sich zusammen aus $s = \delta + j2\pi f = \delta + j\omega$ und bildet über e^{-st} eine komplexe Sinus-Schwingung $e^{-j\omega t}$ mit der Einhüllenden $e^{-\delta t}$. Die (einseitige) Transformationsvorschrift der Laplace-Transformation lautet[39]:

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}\ dt \tag{12}$$

Schreibweise:

$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $\quad X(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\ x(t)$

Die Rücktransformation bzw. die *inverse Laplace-Transformation* wird geschrieben als

$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t)$

und wird in der Praxis durch Transformationstabellen umgesetzt[40], da die Bestimmung der Rücktransformation über ein komplexes Umkehrintegral im Allgemeinen nicht einfach ist. Zur Anwendung von Korrespondenztabellen muss die Bildfunktion noch durch Umformungen in eine Form umgewandelt werden, die in diesen Tabellen wiedergefunden werden kann.[41]

3.3.2 Beispielrechnungen

Sinusfunktion[42]:

Es soll die Laplace-Transformierte der Sinusfunktion

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sin(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

berechnet werden:

$$X(s) = \int_0^\infty \sin(t)\, e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{s^2+1}(-s\sin(t) - \cos(t))\right]_0^\infty$$

[38] (Vaseghi 2007) S. 38-39
[39] (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 146, 148
[40] (Papula 2009) S. 625
[41] (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 156
[42] (Papula 2009) S. 623

$$\left(mit \int e^{at}\sin(bt)\,dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2}(a\sin(bt) - b\cos(bt))\right)$$ [43]

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(-s\sin(t) - \cos(t))\cdot e^{-st}}{s^2+1} - \frac{(-s\sin(0) - \cos(0))\cdot e^{0}}{s^2+1} = 0 - \frac{(0-1)\cdot 1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}, s > 0$$

Es ergibt sich also

$\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$ bzw. $\sin(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2+1}$

Diracsche Deltafunktion[44]:

Die δ-Funktion besitzt folgende Laplace-Transformierte:

$$\mathcal{L}\{\delta(\mathrm{t}-\mathrm{T})\} = \int_0^\infty \delta(\mathrm{t}-\mathrm{T})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\,dt = \mathrm{e}^{-\mathrm{sT}}$$

Zur Auswertung des Integrals wurde die in Kapitel 3.2.3 Beispielrechnung: Spektrum einer Impulsfunktion erwähnte Sampling-Eigenschaft der Deltafunktion benutzt. Für $T = 0$ gilt:

$\mathcal{L}\{\delta(\mathrm{t})\} = 1$

3.3.3 Anwendung der Laplace-Transformation[45]

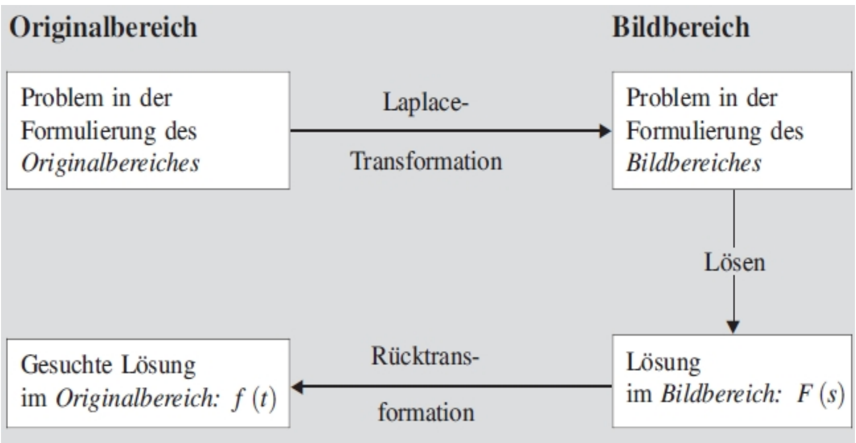


Abbildung 20: Anwendung der Laplace-Transformation (Papula 2009) S. 655

Ziel der Laplace-Transformation ist es, dass komplizierte Rechenoperationen im Originalbereich durch Umwandlung in den zugehörigen Bildbereich vereinfacht werden. Die Lösung im Bildbereich liefert dann die

[43] (Merziger und Wirth 2010) F4
[44] (Papula 2009) S. 624
[45] (Papula 2009) S. 656-657

Bildfunktion $X(s)$, die nach Rücktransformation der gesuchten Lösung $x(t)$ im Originalbereich entspricht. Der schwierigste Schritt dieses Schemas ist dabei die Rücktransformation.

Im folgenden Beispiel soll diese Rücktransformation mithilfe der Partialbruchzerlegung und anschließender Anwendung einer Transformationstabelle durchgeführt werden.

$$X(s) = \frac{s^3 + 2s^2 - 4s + 4}{s^4 - 4s^3 + 4s^2} = \frac{s^3 + 2s^2 - 4s + 4}{s^2(s^2 - 4s + 4)} = \frac{s^3 + 2s^2 - 4s + 4}{s^2(s-2)^2}$$

Für die Partialbruchzerlegung werden die Regeln aus (Furlan, DAS GELBE RECHENBUCH 1 2008) S. 6-12 angewendet:

Nullstellen des Nenners:

$s^2(s-2)^2 = 0 \rightarrow s_{1/2} = 0, \qquad s_{3/4} = 2$

Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{s^3 + 2s^2 - 4s + 4}{s^2(s-2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{(s-2)^2} = \frac{As(s-2)^2 + B(s-2)^2 + Cs^2(s-2) + Ds^2}{s^2(s-2)^2}$$

Durchmultiplizieren mit dem Nenner $s^2(s-2)^2$ liefert:

$$s^3 + 2s^2 - 4s + 4 = As(s-2)^2 + B(s-2)^2 + Cs^2(s-2) + Ds^2$$

Bestimmung der Koeffizienten A, B, C, D mithilfe der Einsetzmethode:

Einsetzen der Nullstellen sowie -1 und 1:

$s = 0 \qquad 4 = 4B \qquad B = 1$

$s = 2 \qquad 12 = 4D \qquad D = 3$

$s = 1 \qquad 3 = A + B - C + D$

$3 = A + 1 - C + 3$

$A - C = -1$

$s = -1 \qquad 9 = -9A + 9B - 3C + D$

$\rightarrow 9 = -9A + 9 - 3C + 3$

$3A + C = 1$

A und C errechnen sich über das Gleichungssystem:

$A - C = -1$

$3A + C = 1$

Addition beider Zeilen liefert:

$4A = 0 \qquad A = 0 \qquad C = 1$

Die Konstanten lauten also $A = 0,\ B = 1,\ C = 1,\ D = 3$

Hieraus folgt die Partialbruchzerlegung

$$X(s) = \frac{s^3 + 2s^2 - 4s + 4}{s^4 - 4s^3 + 4s^2} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-2} + \frac{3}{(s-2)^2}$$

Über eine Transformationstabelle[46] lässt sich gliedweise die Rücktransformation in den Originalbereich von $x(t)$ durchführen:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-2} + \frac{3}{(s-2)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 3 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\}$$
$$= t + e^{2t} + 3te^{2t} = t + (1 + 3t)e^{2t}$$

Mit $t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$, $e^{\alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-\alpha}$, $te^{\alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s-\alpha)^2}$ aus der Transformationstabelle.

3.4 z-Transformation

3.4.1 Heranführung

Zur Beschreibung zeitkontinuierlicher Signale und Systeme wurden in den vorigen Kapiteln die Fourier-Transformation und die Laplace-Transformation behandelt. Die in diesem Kapitel hinzukommende z-Transformation lässt sich als Zeitdiskretisierung der Laplace-Transformation verstehen und bietet Möglichkeiten zur Beschreibung von zeitdiskreten Systemen.[47] [48]

Die Definition der Laplace-Transformation (12)

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}\ dt$$

soll nun ins Zeitdiskrete überführt werden. Hierzu wird aus dem zeitabhängigen Signal $x(t)$ ein gesampeltes Signal $x(mT_s)$, das nur diskreten Zeitpunkten einen Funktionswert zuordnet.

[46] (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 391
[47] (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 284
[48] (Vaseghi 2007) S. 79

Unter der Annahme, dass T_s = 1 ist, wird $x(mT_s)$ zu $x(m)$ und die Laplace-Transformation wird durch Ersetzen des Integralzeichens durch eine Summation zu[49]:

$$X(e^s) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)e^{-sm}, \qquad X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m}$$

(*einseitige* z-Transformation mit $z = e^s$)

Sie wird auch geschrieben als $\mathcal{Z}\{x(m)\}$.

Die komplexe Laplace-Variable $s = \delta + j\omega$ lässt sich in der sogenannten *s-Ebene* mit den Achsen $Re\{s\} = \delta$ (*horizontal*, Einfluss der Einhüllenden: Rate Anschwellen/Abklingen) und $Im\{s\} = j\omega$ (*vertikal*, Frequenz-Achse) darstellen (siehe Abbildung 21). Wegen

$$e^{-sm} = e^{-(s+j2\pi k)m}$$

mit ganzzahligem k bleibt die Laplace-Transformierte eines gesampelten Signals

$$X\left(e^{s+j2\pi k}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)e^{-(s+j2\pi k)m} = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)e^{-sm} = X(e^s)$$

bei Änderung des Imaginärteils um ein ganzzahliges Vielfaches von ω unverändert, der Informationsgehalt in der komplexen s-Ebene wiederholt sich also 2π-periodisch. Wegen dieser Periodizität kann die s-Ebene in eine kreisförmige Darstellung überführt werden. Die Zuordnung $z = e^s$ bildet die s-Ebene auf die sogenannte *z-Ebene* ab, Punkte gleicher Information wiederholen sich nun nicht über die vertikale Achse, sondern werden auf einer Einheitskreislinie abgebildet.[50] z lässt sich auch schreiben als $z = e^s = e^{\delta}e^{j\omega} = re^{j2\pi f}$ mit r als Maß für die Einhüllende der Schwingung. Ein Maß für δ findet sich also nicht mehr auf der horizontalen Achse (s-Ebene), sondern im Abstand vom Ursprung (z-Ebene) und in der Lage innerhalb oder außerhalb des Einheitskreises. Die Frequenzen sind nicht mehr der vertikalen Achse (s-Ebene) zugeordnet, sondern der Kreislinie (z-Ebene) bzw. einem zugehörigen Winkel

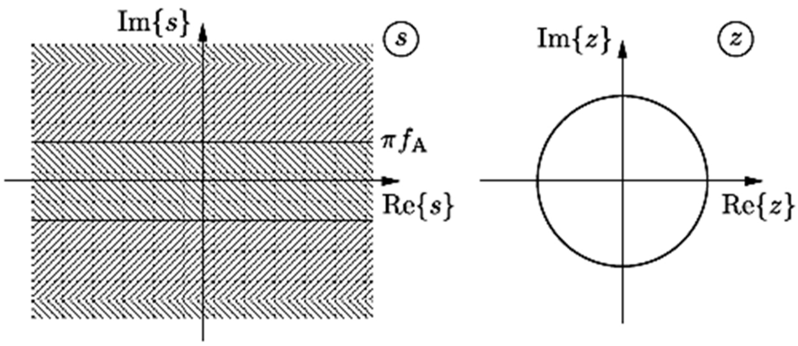


Abbildung 21: s-Ebene, z-Ebene (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 285

[49] (Vaseghi 2007) S. 81
[50] (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 285

abhängig von der Abtastfrequenz F_S.[51] Abbildung 21 zeigt die s- und z-Ebene, Abbildung 22 die Frequenzzuordnung zu einem Winkel.

Zusammengefasst weisen s-Ebene und z-Ebene also folgende Korrespondenzen auf[52]:

- Die imaginäre Achse entspricht dem Einheitskreis
- Die linke/rechte komplexe Ebene entspricht dem Inneren/Äußeren des Einheitskreises
- Der Ursprung $s = 0$ entspricht $z = 1$
- Die halbe Abtastfrequenz entspricht $z = -1$

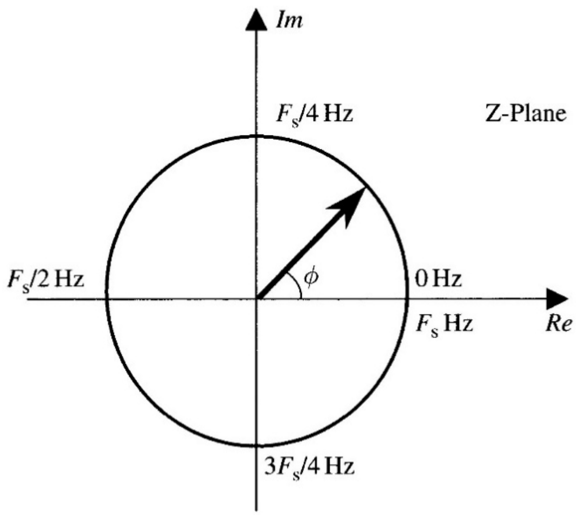


Abbildung 22: Frequenz-Mapping (Vaseghi 2007) S. 84

3.4.2 Eigenschaften der z-Transformation

Es soll die z-Transformation beispielhaft an einem fiktiven Signal $x(m)$ mit vier Funktionswerten durchgeführt werden (siehe Abbildung 23, blaue Werte). Es sei

$$x(0) = a, \qquad x(1) = b, \qquad x(2) = c, \qquad x(3) = d$$

Dessen z-Transformation lautet dann nach Transformationsvorschrift $X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m}$:

$$X(z) = az^{-0} + bz^{-1} + cz^{-2} + dz^{-3}$$

Jedem diskreten Funktionswert wird also anschaulich ein z-Koeffizient zugeordnet, dessen Exponent eine Aussage über die zeitliche Abfolge dieser Funktionswerte trifft.

Eigenschaften:

- *Veränderung der Funktionswerte:* Möchte man diese Funktionswerte nun direkt beeinflussen (z. B. Verdopplung aller Werte, also in der Anwendung beispielsweise eine Pegeländerung), so kann man die z-Transformierte (genauso wie die Funktion $x(m)$ selbst) direkt mit einem Verstärkungsfaktor multiplizieren, um die Amplitude der Einzelwerte zu verändern. Auch lassen sich durch Subtraktion fester Werte eventuelle Gleichspannungsanteile im z-Bereich eliminieren.

[51] (Vaseghi 2007) S. 83
[52] (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 286

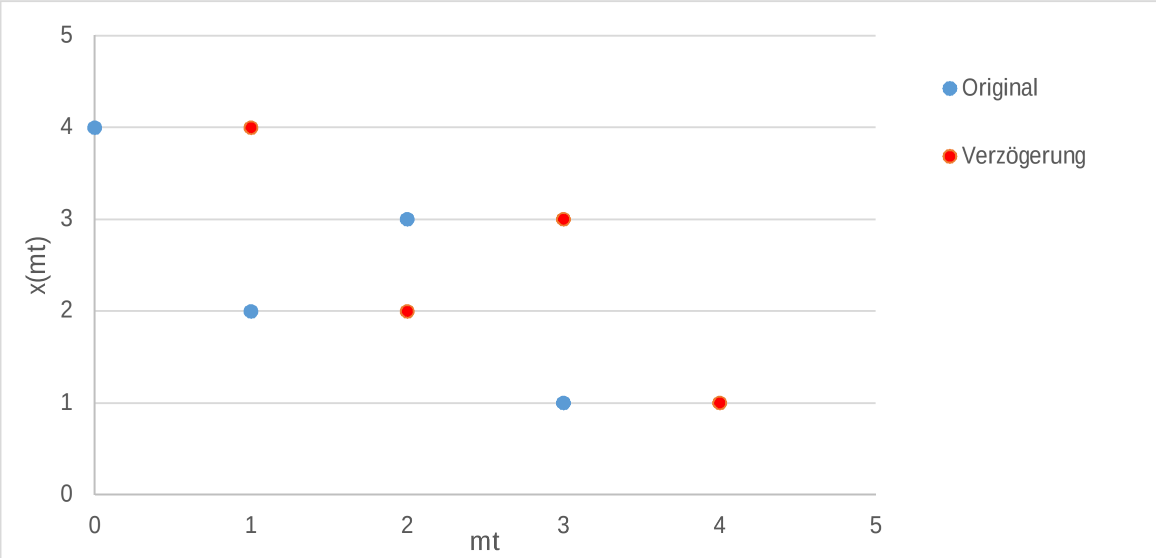


Abbildung 23: Beispielsignal $x(m)$ und verzögertes Signal $x(m-1)$

- *Zeitverschiebung/Delay*[53]: Multiplikation mit der Variablen z^{-k} entspricht einer Zeitverschiebung des Signals $x(m)$ um k Sampling-Intervalle. Sei $x(m-k)$:
  $m - k = n \rightarrow m = n + k$
  $$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m-k)z^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} x(n)z^{-(n+k)} = z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = z^{-k}X(z)$$
  Eine Multiplikation mit z^{-1} resultiert also in einer zeitlichen Verschiebung/Verzögerung der Signalwerte um eine Einheit, an obigem Beispiel angewandt ergibt sich:
  $z^{-1}X(z) = az^{-1} + bz^{-2} + cz^{-3} + dz^{-4}$
  Die Funktionswerte „beginnen" aufgezeichnet also einen Zeitschritt später (weiter rechts) in t-Richtung (siehe Abbildung 23, rote Werte).
- *Faltung*[54 55]: Gegeben seien die Signale $x_1(m), x_2(m)$ und deren z-Transformierte $X_1(z), X_2(z)$. Die Faltung zweier zeitdiskreter Signale ist definiert durch:
  $$x_1(m) * x_2(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(m-k)x_2(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(m-k)$$
  Ihre z-Transformation ergibt sich als Produkt der z-Transformierten $X_1(z) \cdot X_2(z)$:
  $$\mathcal{Z}\{x_1(m) * x_2(m)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (x_1(m) * x_2(m))z^{-m}$$
  $$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(m-k)\, z^{-m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2(m-k)z^{-m}$$
  $$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2(m-k)z^{-(m-k)} = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

[53] (Vaseghi 2007) S. 88-89
[54] (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 300
[55] (Vaseghi 2007) S. 90

· *Ableitung im z-Bereich*[56]*:* Leitet man die z-Transformation nach z ab, so ergibt sich

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-m} = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} mx(m)z^{-m-1} = -z^{-1}\sum_{m=-\infty}^{\infty} mx(m)z^{-m}$$

$$\rightarrow -z\frac{dX(z)}{dz} = mx(m)$$

3.5 Zeitdiskrete Systeme

3.5.1 LTI-Systeme[57]

Behandelt werden sollen hier lineare, zeitinvariante Systeme (LTI-System, LTI ≙ linear, time-invariant). Deren mathematische Darstellung ist einfach und ihre Analyse und Synthese wird dadurch erleichtert.[58] Zunächst muss zur Systemdarstellung der zeitdiskrete Dirac-Impuls eingeführt werden:

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}$$

Der Funktionswert eines diskreten Signals $x(m)$ zum Zeitpunkt m_0 erhält man über die Faltung der Folge mit dem diskreten Dirac-Impuls zum Zeitpunkt m_0:

$$x(m_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta_{m-m_0}$$

Als *Impulsantwort* $g(m)$ wird nun die Antwort eines zeitdiskreten Systems S auf das zeitdiskrete Eingangssignal δ_m bezeichnet: $g(m) = S\{\delta_m\}$

Liegt am Eingang des Systems S nun ein Signal $x(m)$ an, so ergibt sich als Ausgangssignal:

$$y(m) = S\{x(m)\} = S\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\delta_{m-i}\right\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)S\{\delta_{m-i}\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)g(m-i) = x(m) * g(m)$$

Das zeitdiskrete LTI-System wird also vollständig durch die Impulsantwort $g(m)$ charakterisiert, die Reaktion auf ein Eingangssignal berechnet sich über die Faltung des

56 (Vaseghi 2007) S. 90
57 (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 278-282
58 (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 134

Eingangssignals mit der Impulsantwort des Systems. Systeme mit endlich langer Impulsantwort werden *FIR-Systeme* (FIR ≙ *finite impulse* response) genannt. Besitzen Systeme eine unendlich lange Impulsantwort, so werden sie als *IIR-Systeme* (IIR ≙ *infinite impulse response*) bezeichnet. Als *kausal* wird ein LTI-System bezeichnet, wenn die Impulsantwort zu negativen Zeitpunkten gleich null ist. Als *stabil* wird ein LTI-System bezeichnet, wenn $\sum_{m=-\infty}^{\infty}|g(m)| < \infty$, also wenn die Impulsantwort absolut summierbar ist[59] und das System anschaulich nach Anregung wieder in seinen Ausgangszustand zurückkehrt und nicht „aufschwingt" bzw. resoniert.

Zusammenhänge zwischen zeitkontinuierlichen Signalen werden in der Naturwissenschaft oft durch Differentialgleichungen beschrieben (z. B. Bewegungsgleichung: $s(t) = v \cdot t + s_0 = \dot{s}(t) \cdot t + s_0$ mit Strecke $s(t)$, Geschwindigkeit v, Anfangswert s_0, Ableitung $\frac{d}{dt}s(t) = \dot{s}(t) = v$). Diese basieren auf i-ten zeitlichen Ableitungen des Ursprungssignals. Da aufgrund der Abtastung jedoch zeitdiskrete Signale $x(m)$ vorliegen, lässt sich die Ableitung nicht direkt bilden. Sie lässt sich durch eine Differenzengleichung annähern („Steigungsdreieck"):

$$\dot{x}(m) = \frac{x(m) - x(m-1)}{T_s}$$

Es gehen bei kausalen Systemen also auch zeitlich verschobene bzw. vergangene Funktionswerte $x(m-i),\ i > 0$ in die Differenzengleichung mit ein. Der aktuelle Ausgangswert $y(m)$ eines kausalen Systems kann also von vergangenen Ausgangs- und Eingangswerten abhängig sein. Diese Abhängigkeit lässt sich schreiben als[60]:

$$y(m) = \sum_{k=1}^{N} a_k y(m-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(m-k) \tag{13}$$

Diese Differenzengleichung beschreibt das Ausgangssignal also durch Änderungsraten der vorangegangenen Ausgangs- und Eingangswerte. Die Koeffizienten a_k und b_k charakterisieren das System.

3.5.2 z-Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion eines Systems beschreibt das Verhältnis zwischen Ausgangs- und Eingangssignal, z. B. $\frac{u_a(t)}{u_e(t)}$. Die *z-Übertragungsfunktion* beschreibt ebendieses Verhältnis der z-Transformierten von Ausgangs- und Eingangssignal eines zeitdiskreten Systems.

[59] (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 280
[60] (Vaseghi 2007) S. 91

Bildet man die zugehörige z-Transformierte zu Gleichung (13), so ergibt sich nach (Vaseghi 2007) S. 91:

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} Y(z) + \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

Durch Umstellen in die Form $Y(z)/X(z)$ erhält man

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 - a_1 z^{-1} - \cdots - a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

mit $H(z)$, Systemübertragungsfunktion bzw. z-Übertragungsfunktion, die den Eingang in den Ausgang überführt.

3.5.3 Pol- und Nullstellen

Die z-Übertragungsfunktion lässt die Beschreibung eines Systems über ihre Pol- und Nullstellen zu. Die Nullstellen von $H(z)$ sind diejenigen z-Werte, für die die Übertragungsfunktion bzw. ihr Zähler den Wert null hat. Polstellen finden sich für diejenigen z-Werte, für die die Übertragungsfunktion unendlich groß bzw. der Nenner null wird. Um in diese Pol-Nullstellen-Darstellung übergehen zu können, wird $H(z)$ zunächst dahingehend umgeformt, sodass nur noch positive Potenzen in Zähler- und Nennerpolynom auftauchen:

$$H(z) = \frac{b_0 z^{-M}}{z^{-N}} \cdot \frac{z^M + \frac{b_1}{b_0} z^{M-1} + \cdots + \frac{b_M}{b_0}}{z^N - a_1 z^{N-1} - \cdots - a_N} = b_0 z^{-M+N} \cdot \frac{z^M + \frac{b_1}{b_0} z^{M-1} + \cdots + \frac{b_M}{b_0}}{z^N - a_1 z^{N-1} - \cdots - a_N}$$

Zähler und Nenner (des rechten Bruchs) sind nun Polynome M-ten bzw. N-ten Grades und besitzen demnach genau M bzw. N Nullstellen. Diese Polynome lassen sich nach dem Fundamentalsatz der Algebra als Produkt von M bzw. N Linearfaktoren ausdrücken:

$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n (z - b_1) \dots (z - b_n)$ mit den Nullstellen $b_1, \dots, b_n$ von $f(z)$[61]

Angewandt auf die z-Übertragungsfunktion $H(z)$ ergibt sich:

$$H(z) = b_0 z^{-M+N} \cdot \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)} = G z^{-M+N} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{M} (z - z_k)}{\prod_{k=1}^{N} (z - p_k)}$$

mit dem Verstärkungsfaktor $G = b_0$, den Nullstellen z_k und den Polstellen p_k von $H(z)$.

[61] (Merziger und Wirth 2010) S. 106

Mithilfe der Systembeschreibung über Pol- und Nullstellen lassen sich nun einige Aussagen über das Systemverhalten treffen:

- In den Polstellen treten Resonanzen des Systems auf, dies zeigt sich beispielsweise in Pegelspitzen bei bestimmtem Frequenzen in der Anwendung digitaler Filter. Polstellen stehen für Feedback-Anteile (Rückführungen) des Systems. Soll das System stabil sein, so muss die Polstelle einen Betrag kleiner 1 besitzen, sie liegt also innerhalb des Einheitskreises in einem *Pol-Nullstellen-Diagramm*. Bei einem Betrag von 1 wirkt die Polstelle wie ein Oszillator, bei größerem Betrag ist das System instabil.
- In den Nullstellen treten „Anti-Resonanzen", anschaulich Tiefen/Löcher im Frequenzgang, auf. Sie stehen für Feed-Forward-Anteile (Vorwärtskopplungen) des Systems und sind vom Betrag her nicht eingeschränkt bzw. haben keinen Einfluss auf die Systemstabilität.

Die grafische Darstellung der z-Übertragungsfunktion eines zeitdiskreten Systems erfolgt mithilfe eines Pol-Nullstellen-Diagramms in der komplexen Zahlenebene mit Einheitskreis. Die Polstellen werden durch Kreuze (×) gekennzeichnet, die Nullstellen durch Kreise (○).[62]

Beispiel (Vaseghi 2007) *S. 92-93:*

Gegeben sei das folgende, exponentiell fallende einseitige Signal mit α < 1:

$$x(m) = \begin{cases} \alpha^m, & m \geq 0 \\ 0, & m < 0 \end{cases}$$

Als z-Transformierte ergibt sich

$$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m z^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^m$$

Diese geometrische Reihe konvergiert für $|\alpha| < 1$ (nach $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, |q| < 1$ [63]) zu

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha}$$

[62] (Vaseghi 2007) S. 91-92
[63] (Merziger und Wirth 2010) S. 337

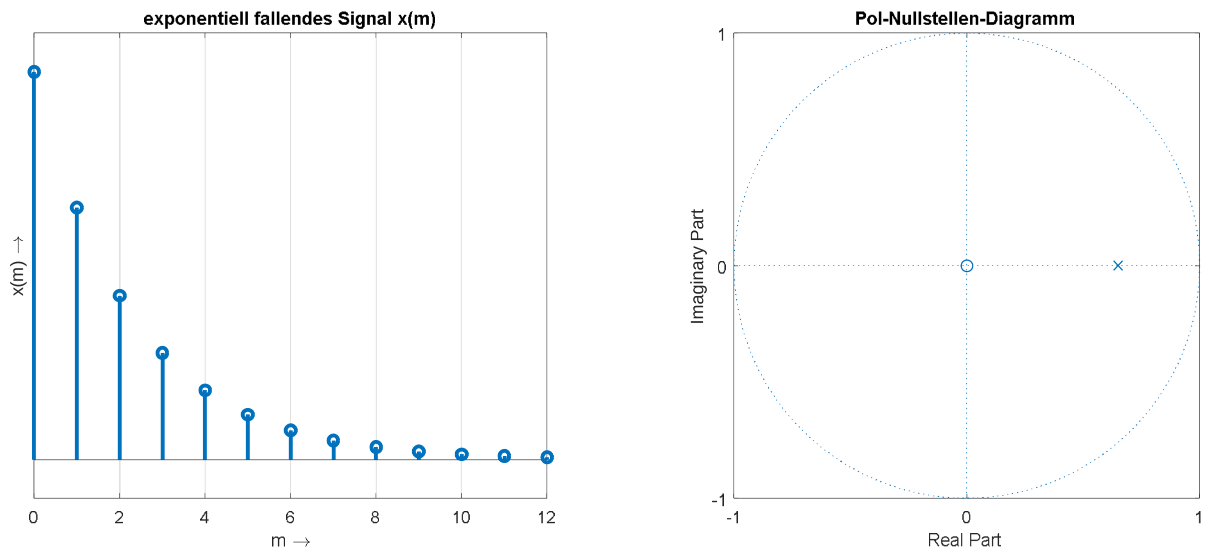


Abbildung 24: $x(m)$ (links) und zugehöriges Pol-Nullstellen-Diagramm, MATLAB-CODE 7: ExpSign_PoleZero

und besitzt damit die einfache Nullstelle für $z = 0$ und die einfache Polstelle für $z = \alpha$. Das Signal $x(m)$ und das zugehörige Pol-Nullstellen-Diagramm der z-Übertragungsfunktion sind in Abbildung 24 dargestellt.

3.5.4 Beispielrechnungen

Die folgenden Beispiele zeigen die Anwendung der z-Transformation sowie der z-Übertragungsfunktion und sollen die Auswirkungen von Pol- und Nullstellen anschaulich machen. Behandelt werden Feedback- und Feed-Forward-Systeme erster und zweiter Ordnung (in erster Ordnung mit einer Pol- bzw. Nullstelle und in zweiter Ordnung mit einem Pol- bzw. Nullstellenpaar). Bisher wurde die digitale Filterung noch nicht behandelt, dennoch kommt es in den Anwendungsbeispielen bereits zu Überschneidungen mit diesem Themenbereich.

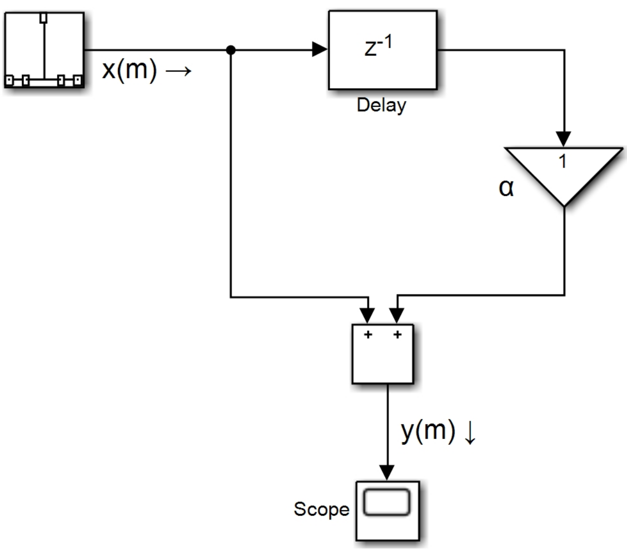


Abbildung 25: Feed-Forward-System erster Ordnung

Einfache Nullstelle[64]

Ein erstes Feed-Forward-System soll mit folgenden Bestandteilen das Eingangssignal $x(m)$ in das Ausgangssignal $y(m)$ überführen (bzw. hier im sogenannten „Scope“ darstellen):

[64] (Vaseghi 2007) S. 93-94

Verzögerungsglied, Koeffizient bzw. Faktor α, Summation, (siehe Abbildung 25). Der erste Pfad überführt das Eingangssignal direkt in den Ausgang, der zweite verzögert das Eingangssignal um eine Abtastperiode, führt eine Gewichtung um α durch und addiert diesen Signalanteil zum direkten Signalanteil hinzu. Das Ausgangssignal lässt sich aus dieser Darstellung direkt aufstellen. Es besteht aus den eben beschriebenen Signalanteilen $x(m)$ aus dem direkten Pfad und dem gewichteten, verzögerten Signalanteil $\alpha x(m-1)$:

$$y(m) = \alpha x(m-1) + x(m)$$

mit der z-Transformierten

$$Y(z) = \alpha z^{-1} X(z) + X(z) = X(z)(1 + \alpha z^{-1})$$

Die z-Übertragungsfunktion lässt sich hieraus aufstellen:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + \alpha z^{-1} = 1 + \frac{\alpha}{z} = \frac{z+\alpha}{z}$$

Es ergibt sich eine Nullstelle für $z = -\alpha$ und eine Polstelle im Ursprung für $z = 0$. Liegt ein Dirac-Impuls am Eingang an, so ergibt sich am Ausgang die Impulsantwort des Systems (siehe Abbildung 26 (a)). Die Charakteristik des Systems ist dabei lediglich über den Systemkoeffizienten α steuerbar. Mit $z = e^{j\omega}$ lässt sich die Frequenzantwort im sogenannten *Bode-Diagramm* darstellen. Es stellt die Übertragungsfunktion über der Frequenz im logarithmischen Maßstab dar. Zusätzlich wird in diesem die Phasendifferenz zwischen Eingangs- und Ausgangssignal logarithmisch über der Frequenz aufgetragen[65], worauf in diesem Beispiel verzichtet wird. Der Betrag der Frequenzantwort ist dabei der Wert von $H(z)$ für z auf dem Einheitskreis. Der Nenner wird dann 1, eben weil $z = e^{j\omega}$ auf dem Einheitskreis liegt. (Anschaulich: $x(t) = e^{j\omega t}$ bildet eine harmonische Schwingung ab mit der Frequenz ω und dem Laufindex t. $x(\omega) = e^{j\omega}$ dagegen besitzt die Frequenz ω als Laufindex, dieser reicht von null bis zur Sampling-Frequenz).

$$|H(\omega)| = \frac{|e^{j\omega} + \alpha|}{|e^{j\omega}|} = |e^{j\omega} + \alpha| \; für \; z = e^{j\omega}$$

Für $\omega = 0$ ist $H(\omega = 0) = 1 + \alpha = 0 \; mit \; \alpha = -1$. Diese Frequenz mit zugehöriger Nullstelle befindet sich direkt am Anfang der Kreislinie, in der rechten Hälfte der z-Ebene (Abbildung 26 (b) links).

Für $\omega = \pi$ ist $H(\omega = \pi) = 1 - \alpha = 0$ mit $\alpha = 1$. Bei $\omega = \pi$ entspricht die Frequenz der halben Abtastfrequenz $F_s/2$, also der höchsten im Signal vorkommenden Frequenz (Nyquist-Frequenz) und befindet sich bei „Abfahren“ der Kreislinie im Pol-Nullstellen-Diagramm in

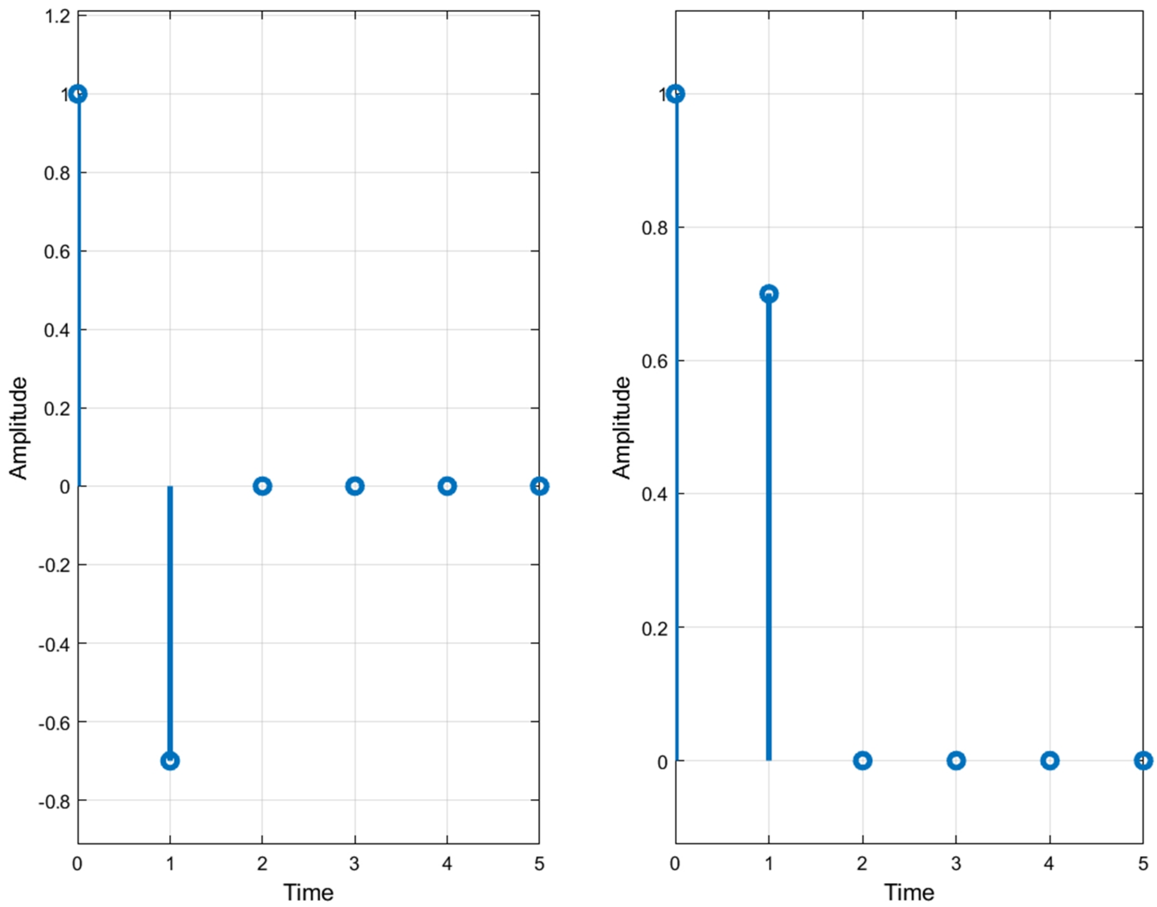
65 (Dössel 2011) S. 144

positiver Frequenzrichtung bei der Hälfte der Strecke. Dort, in der linken Hälfte der z-Ebene, findet sich auch die zugehörige Nullstelle (Abbildung 26 (b) rechts).

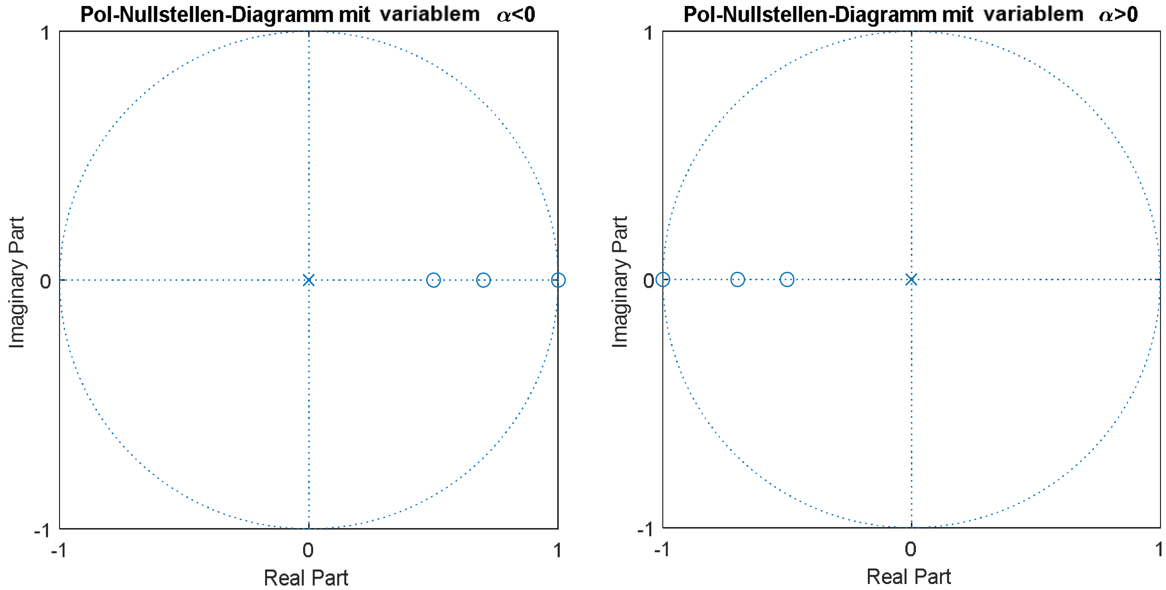
Es ergibt sich also, dass

- die Übertragungsfunktion $H(\omega)$ Hochpass-Wirkung hat für α < 0: Sie „dämpft" tiefe Frequenzen ω. Wenn α < 0 ist, dann liegen die Nullstellen in der rechten Hälfte der z-Ebene (Frequenzen in der Nähe der Nullstelle à „Anti-Resonanzen", Dämpfung)
- die Übertragungsfunktion $H(\omega)$ Tiefpass-Wirkung hat für α > 0: Sie „dämpft" hohe Frequenzen ω. Wenn α > 0 ist, dann liegen die Nullstellen in der linken Hälfte der z-Ebene. (Frequenzen in der Nähe der Nullstelle à „Anti-Resonanzen", Dämpfung)

(a)



(b)



(c)

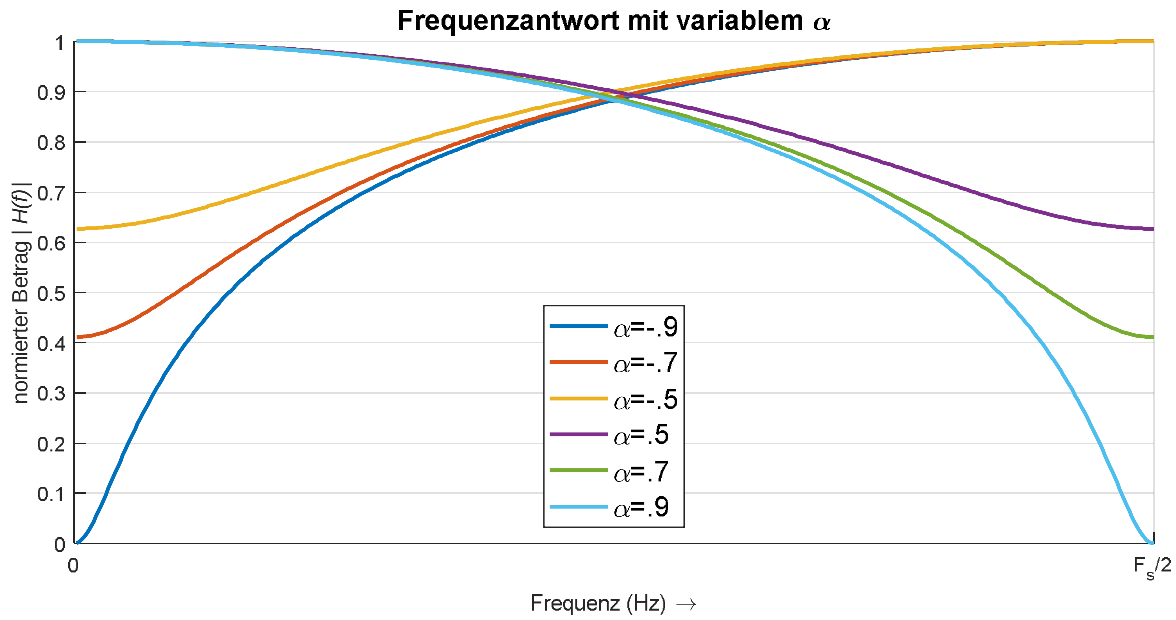


Abbildung 26: (a) Impulsantwort, (b) Pol-Nullstellen-Diagramm und (c) Frequenzantwort (hier: normierte Übertragungsfunktion über linearer Frequenz) des Feed-Forward-Systems erster Ordnung mit variablem α; siehe Kapitel MATLAB-CODE 8: 1stOrderFeedForward_PoleZero sowie MATLAB-CODE 9: 1stOrderFeedForward_FreqResponse

Einfache Polstelle[66]

Ähnlich zum vorherigen Beispiel soll nun ein Feedback-System erster Ordnung betrachtet werden. Es besitzt die gleichen Bestandteile wie das analysierte Feed-Forward-System.

[66] (Vaseghi 2007) S. 94-95

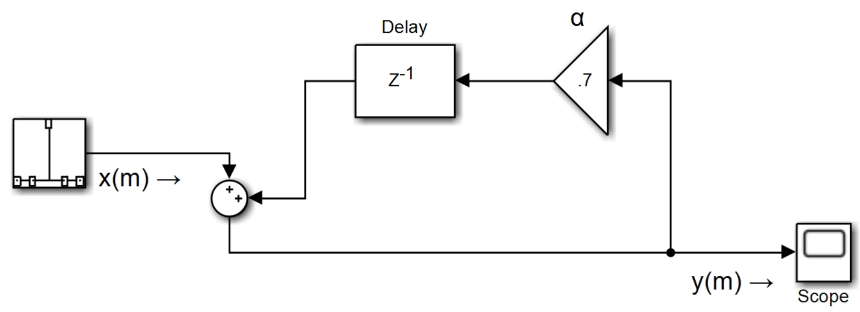


Abbildung 27: Feedback-System erster Ordnung

Verzögerungsglied und Systemkoeffizient sind nun nicht vorwärts gekoppelt, sondern befinden sich in einem Rückführungspfad. Auch hier lässt sich das Ausgangssignal $y(m)$ aus der zugehörigen Darstellung (Abbildung 27) direkt aufstellen:

$$y(m) = \alpha y(m-1) + x(m)$$

Die z-Transformation hiervon lautet

$$Y(z) = \alpha z^{-1} Y(z) + X(z)$$

Hieraus wird wiederum die z-Übertragungsfunktion $H(z)$ aufgestellt:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha}$$

Es findet sich eine Nullstelle im Ursprung $z = 0$ und eine Polstelle für $z = \alpha$. Substitution von $z = e^{j\omega}$ liefert die Frequenzantwort:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

Die Nullstelle im Ursprung hat auf die Frequenzantwort keine Auswirkung. Für $\omega = 0$ ergibt sich $H(\omega = 0) = \frac{1}{1-\alpha}$ und für $\omega = \pi$ liefert $H(\omega = \pi) = \frac{1}{1+\alpha}$.

- Wegen $z = \alpha$ ist die Polstelle für positive Werte von α in der rechten Hälfte der z-Ebene, in diesem Fall hat das System Tiefpass-Charakter (Frequenzen in der Nähe der Polstelle à Resonanzen). Die Übertragungsfunktion nimmt dann in Richtung $\omega = 0$ immer größere Werte an.
- Für negative Werte von α befindet sich die Polstelle in der linken Hälfte der z-Ebene, in diesem Fall hat das System also Hochpass-Charakter (Frequenzen in der Nähe der Polstelle à Resonanzen). Die Übertragungsfunktion nimmt dann in Richtung $\omega = \pi$ immer größere Werte an.

Abbildung 28 zeigt die zugehörigen Impulsantworten, Pol-Nullstellen-Diagramme und Frequenzantworten für variable Werte von α. Für $\alpha < 0$ siehe Abbildung 28 Spalte (a), andernfalls für $\alpha > 0$ siehe Abbildung 28 Spalte (b).

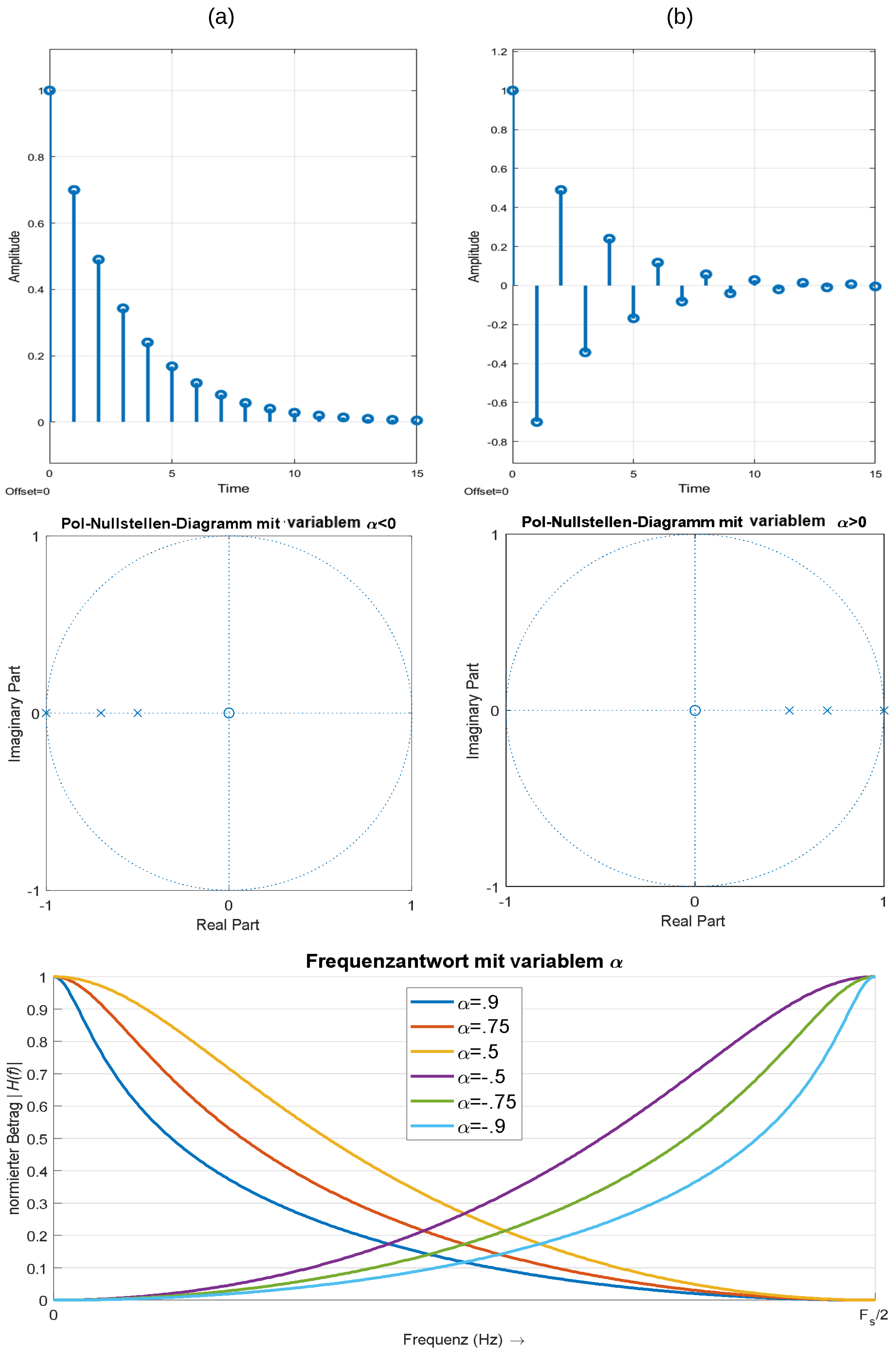


Abbildung 28: Impulsantwort, Pol-Nullstellen-Diagramm und Frequenzantwort (hier: normierte Übertragungsfunktion über linearer Frequenz) des Feed-Forward-Systems erster Ordnung mit variablem α; siehe Kapitel MATLAB-CODE 10: 1stOrderFeedBack_PoleZero sowie MATLAB-CODE 11: 1stOrderFeedBack_FreqResponse

Nullstellenpaar[67]

Das in Abbildung 29 dargestellte Feed-Forward-System zweiter Ordnung besitzt die drei Systemkoeffizienten b_0, b_1 und b_2. Das Ausgangssignal lässt sich direkt aufstellen:

$$y(m) = b_0 x(m) + b_1 x(m-1) + b_2 x(m-2)$$

Als z-Transformierte ergibt sich dann

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_2 z^{-2} X(z)$$

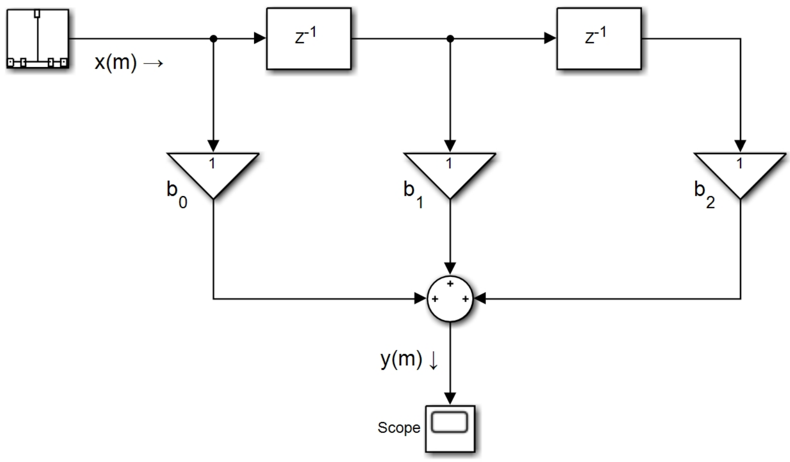


Abbildung 29: Feed-Forward-System zweiter Ordnung

woraus die z-Übertragungsfunktion resultiert:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \qquad (14)$$

Über den Fundamentalsatz der Algebra lässt sich die Übertragungsfunktion wiederum als Produkt aus Linearfaktoren schreiben.[68] Wenn $H(z)$ reelle Koeffizienten besitzt, so gilt für die komplexe Nullstelle a folgendes: $f(a) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{a}) = 0$ mit $\bar{a} \triangleq$ konjugiert komplexe Zahl zu a. Ist $a = x + jy = re^{j\varphi}$, dann ist $\bar{a} = x - jy = re^{-j\varphi}$.[69] Es ergibt sich also für $H(z)$:

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2} = \frac{b_0(z - z_1)(z - z_2)}{z^2} = \frac{b_0(z - z_1)(z - \bar{z}_1)}{z^2} = \frac{b_0(1 - z_1 z^{-1})(1 - \bar{z}_1 z^{-1})}{z}$$

Es findet sich eine Polstelle im Ursprung. Für die weitere Betrachtung sei $G = b_0$ der Verstärkungsfaktor. Für $H(z) = 0$ muss nun nur noch der Zähler betrachtet werden:

$$H(z) = G(1 - z_1 z^{-1})(1 - \bar{z}_1 z^{-1})$$

Setzt man nun $z_1 = re^{j\varphi}$ und $\bar{z}_1 = re^{-j\varphi}$ in die Gleichung ein, ergibt sich mit der Kreisfrequenz φ und dem Radius r der Nullstellen über Ausmultiplizieren und Anwendung der Euler-Darstellung $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz})$ der Kosinus-Funktion[70]:

$$\begin{aligned} H(z) &= G\left(1 - re^{j\varphi} z^{-1}\right)\left(1 - re^{-j\varphi} z^{-1}\right) = G\left(1 - re^{j\varphi} z^{-1} - re^{-j\varphi} z^{-1} + r^2 z^{-2}\right) \\ &= G\left(1 - rz^{-1}\left[e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right] + r^2 z^{-2}\right) \\ &= G(1 - 2r\cos(\varphi)\, z^{-1} + r^2 z^{-2}) \end{aligned}$$

---

[67] (Vaseghi 2007) S. 95-97
[68] (Merziger und Wirth 2010) S. 106
[69] (Merziger und Wirth 2010) S. 98
[70] (Furlan, DAS GELBE RECHENBUCH 3 2008) S. 128

Vergleicht man nun die Koeffizienten aus diesem Ergebnis mit den Koeffizienten der Übertragungsfunktion aus Gleichung (14), so ergeben sich $b_0 = G,\ b_1 = -2Gr\cos(\varphi)$ und $b_2 = Gr^2$. Impulsantwort, Nullstellenlage und Frequenzantwort hängen also von den Systemkoeffizienten b_k ab bzw., genauer, von r (≙ Bandbreite & Tiefe) und φ (≙ „Anti-Resonanzfrequenz“, siehe Abbildung 30).

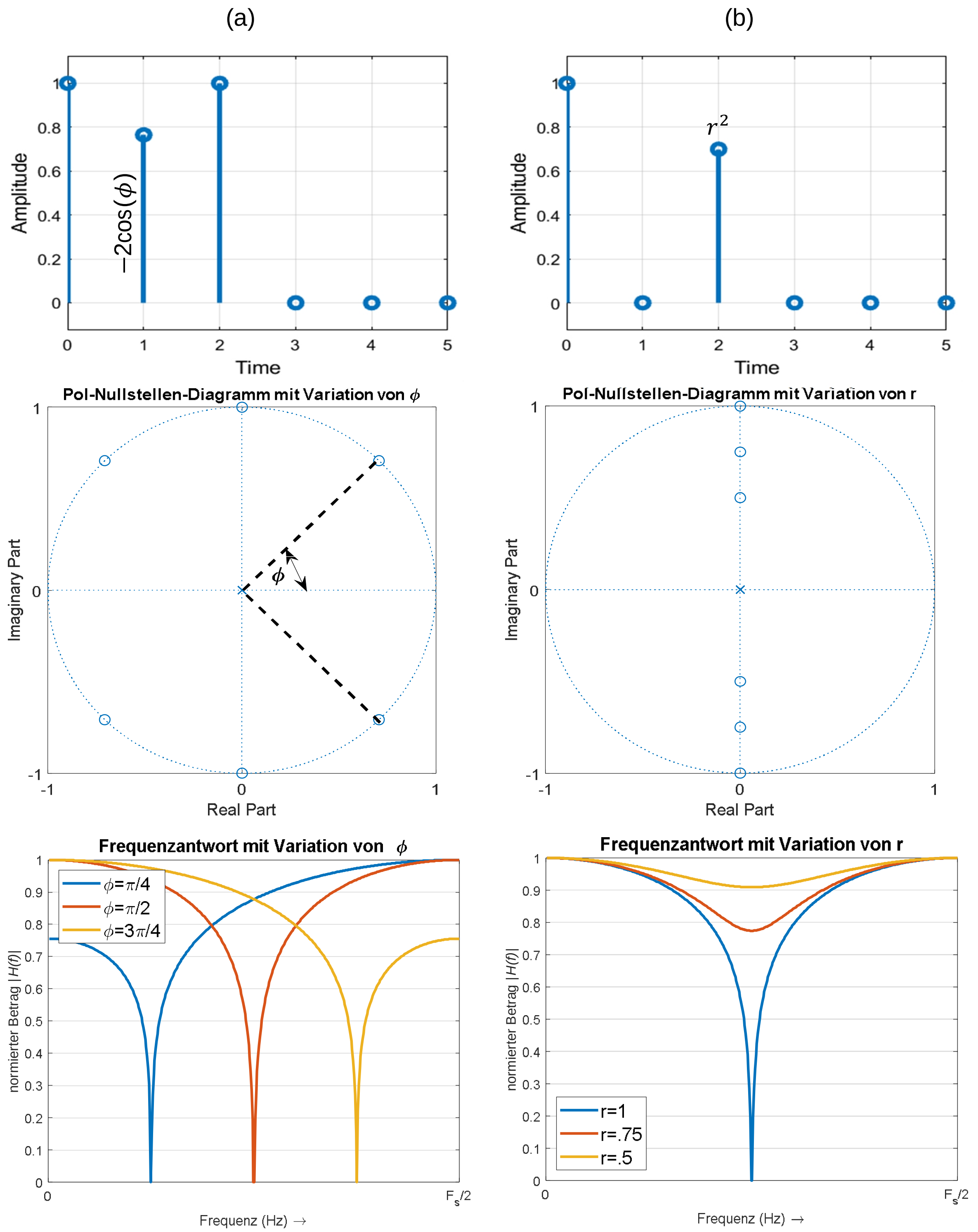


Abbildung 30: Impulsantwort, Pol-Nullstellen-Diagramm und Frequenzantwort eines Feed-Forward-Systems zweiter Ordnung mit konjugiert komplexem Nullstellenpaar; in (a) Variation von ϕ mit $r = 1$, in (b) Variation von r mit $\phi = \pi/2$. Siehe MATLAB-Code 12: 2ndOrderFeedForward_PoleZero, MATLAB-Code 13: 2ndOrderFeedForward_FreqResponse

Polstellenpaar[71]

In diesem Beispiel wird ein Feedback-System zweiter Ordnung (siehe Abbildung 31) behandelt. Es besitzt die Systemkoeffizienten g, a_1 und a_2. Das Ausgangssignal $y(m)$, dessen z-Transformierte $Y(z)$ und die durch Umformen daraus resultierende z-Übertragungsfunktion $H(z)$ ergeben sich zu:

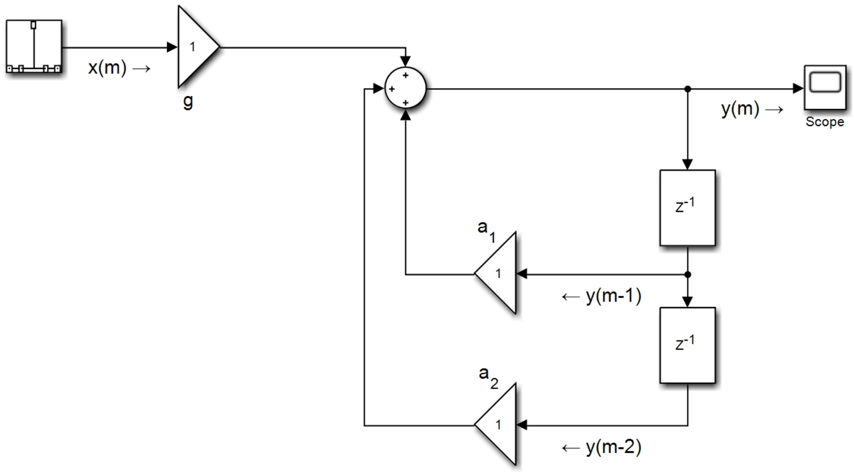


Abbildung 31: Feedback-System zweiter Ordnung

$$y(m) = a_2 y(m-2) + a_1 y(m-1) + g x(m)$$

$$Y(z) = a_2 z^{-2} Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + g X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{g}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

Über den Fundamentalsatz der Algebra lässt sich diese Funktion wie im vorherigen Beispiel (Nullstellenpaar) als Produkt aus Linearfaktoren mit reellen Systemkoeffizienten schreiben.

$$H(z) = \frac{1}{z^{-2}} \frac{g}{z^2 - a_1 z - a_2} = \frac{1}{z^{-2}} \frac{g}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{z^{-1}} \frac{g}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})}$$
$$= z \frac{g}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - \overline{z_1} z^{-1})}$$

Es findet sich eine Nullstelle im Ursprung $z = 0$. Setzt man nun das komplex konjugierte Polstellenpaar $z_1 = re^{j\varphi}$ und $\overline{z_1} = re^{-j\varphi}$ in die Gleichung ein, ergibt sich mit der Kreisfrequenz φ und dem Radius r der Polstellen:

$$H(z) = \frac{g}{(1 - re^{j\varphi} z^{-1})(1 - re^{-j\varphi} z^{-1})} = \frac{g}{1 - 2r\cos(\varphi)\, z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Vergleicht man nun wieder die Koeffizienten aus diesem Ergebnis mit den Koeffizienten a_1 und a_2 der Übertragungsfunktion, so ergeben sich $a_1 = 2r\cos(\varphi)$ und $a_2 = -r^2$. Impulsantwort, Nullstellenlage und Frequenzantwort hängen also von den Systemkoeffizienten a_k ab bzw., genauer, von r (≙ Bandbreite & Tiefe) und φ (≙ Resonanzfrequenz, siehe Abbildung 32).

---

[71] (Vaseghi 2007) S. 98-99

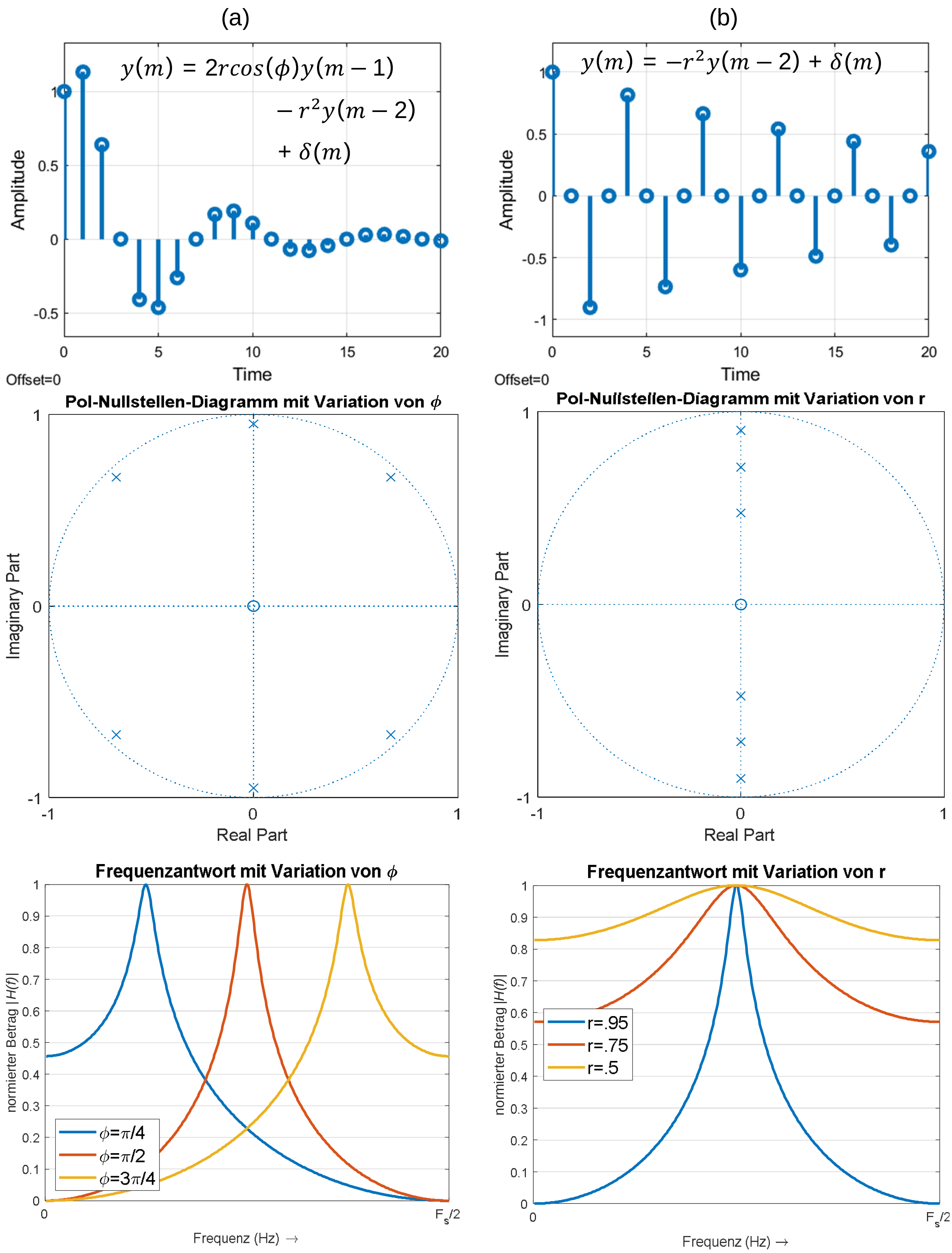


Abbildung 32: Impulsantwort, Pol-Nullstellen-Diagramm und Frequenzantwort eines Feedback -Systems zweiter Ordnung mit konjugiert komplexem Polstellenpaar; in (a) Variation von ϕ mit r = 0,95, in (b) Variation von r mit ϕ = $\pi/2$. Siehe MATLAB-Code 14: 2ndOrderFeedBack_PoleZero sowie MATLAB-Code 15: 2ndOrderFeedBack_FreqResponse

3.6 Zusammenhang der Transformationen[72]

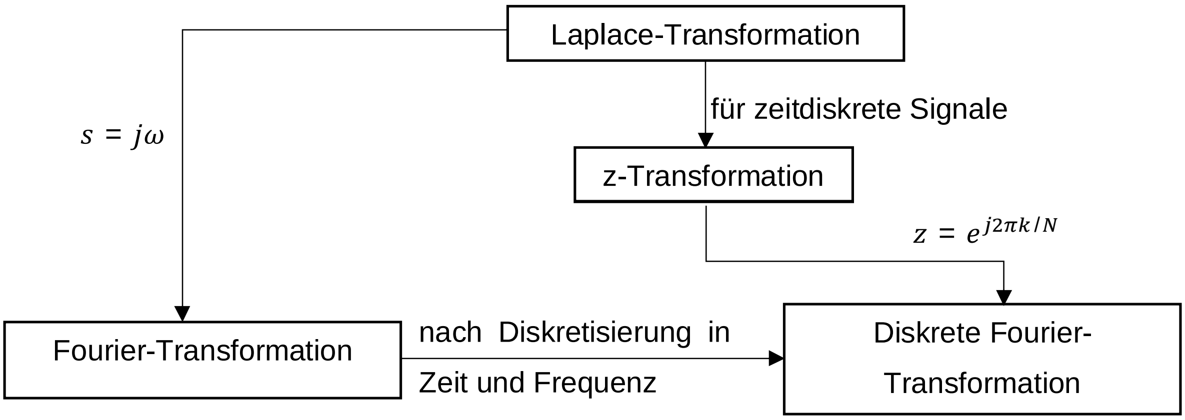


Abbildung 33: Zusammenhänge zwischen Laplace-, z- und Fourier-Transformation (Vaseghi 2007) S. 80

In Kapitel 3.4.1 Heranführung wurde die z-Transformation aus der Laplace-Transformation eines zeitdiskreten Signals hergeleitet. Über $s = \delta + j\omega$ ergibt sich:

$$z = e^{s} = e^{\delta} e^{j\omega} = re^{j2\pi f}$$

Die z-Transformation kann dann umgeschrieben werden:

$$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) z^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) r^{-m} e^{-j2\pi f m}$$

Für $r = 1$ wird die z-Transformation dann zur diskreten Form der Fourier-Transformation (vgl. 3.2.4 Diskretisierung der Fourier-Transformation), die z-Transformation ist also eine Verallgemeinerung der diskreten Fourier-Transformation.

$$X\left(z = e^{-j2\pi f}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) e^{-j2\pi f m}$$

Im Zeitkontinuum existiert auch ein Zusammenhang zwischen Laplace- und Fourier-Transformation. Die Laplace-Transformation ist ein einseitiges Integral mit einer unteren Integrationsgrenze von null, während bei der Fourier-Transformation von $-\infty$ bis $+\infty$ integriert wird. Bildet man nun ein Integral über ein einseitiges Signal für Zeitpunkte größer gleich null, so stimmen die Integrationsgrenzen für Laplace und Fourier überein. Für $s = j2\pi f$ und $\delta = 0$ stimmen Laplace- und Fourier-Integral überein – die Fourier-Transformation über ein

[72] (Vaseghi 2007) S. 81-82

einseitiges Signal stellt also einen Spezialfall der Laplace-Transformation dar, bei dem die Einhüllende nicht existiert (bzw. dem Faktor 1 entspricht).

4 Digitale Filter

In diesem Kapitel wird zunächst ein einleitender Überblick gegeben, welche Funktion von Filtern allgemein erwartet wird und wo sie Anwendung finden. Anschließend wird ein qualitativer Überblick über verschiedene, grundlegende Filtertypen gegeben. Es erfolgt eine kurze Zusammenfassung der bereits erwähnten und für die Filterung wichtigen Begriffe LTI, FIR und IIR. Abschließend werden dann die folgenden Themen behandelt: Linearphasige FIR-Filter, FIR-Filter-Design (weitere Beispielrechnungen im Anhang) und IIR-Filter-Design durch Pol-Nullstellen-Platzierung.

4.1 Einleitung

Im Tonstudiobereich versteht man unter einem „Filter" (sei es digital oder analog) ein System, das die spektrale Beeinflussung von Audiosignalen ermöglicht. Dabei werden Frequenzbestandteile in Relation zu anderen Frequenzen entweder verstärkt oder abgeschwächt.[73] Audiofilter sind grundlegende Elemente zur Signalverarbeitung und kommen auf der gesamten Signalübertragungsstrecke vor. Komplexere Filterfunktionen finden sich in der Tonstudiotechnik, während in Endgeräten einfachere Filter auftauchen, die eine individuelle Klangeinstellung beim Hörer erlauben.[74] Diese sind häufig über aussagekräftige Voreinstellungen auszuwählen, ohne dass jedoch einzelne Parameter genau überblickt werden müssen. Auch dazwischen, in der reinen Signalübertragung, tauchen Filterfunktionen auf. So ist die Frequenzwahl im UKW-Radio oder die Senderwahl von TV-Geräten über Filterung eines gewünschten Frequenzbands möglich. Aliasing-Effekte werden durch sog. Anti-Aliasing-Filter verhindert.[75]

In der Tonstudiotechnik sind auch heutzutage noch analoge Filter anzutreffen, denen besondere klangliche Eigenschaften zugeschrieben werden. Unterstützt, ergänzt oder gänzlich ersetzt werden diese jedoch vielfach durch digitale Filterstrukturen. Die Beschreibung

[73] (Dickreiter, et al. 2014) S. 683
[74] (Zölzer 2005) S. 121
[75] (Vaseghi 2007) S. 111

des Filterverhaltens geschieht jedoch sowohl analog als auch digital mithilfe von Übertragungsfunktionen.

4.2 Filtertypen in der Anwendung[76]

Tiefpass- und Hochpass-Filter besitzen die Grenzfrequenz f_g (3dB-Grenzfrequenz) bzw. f_c, die Cut-Off-Frequenz, und haben im unteren bzw. oberen Frequenzbereich ihren Durchlassbereich, also zu den „Rändern“ der vorkommenden Frequenzen hin.

Bandpass- und Bandsperr-Filter haben eine Durchlass- bzw. Sperrwirkung im mittleren Frequenzbereich. Sie besitzen eine obere und eine untere Grenzfrequenz f_o und f_u, aus denen sich die Bandbreite $f_b = f_o - f_u$ ergibt. In der Anwendung wünscht man sich eine konstante relative Bandbreite f_b/f_m abhängig von der Mittenfrequenz. Ein Oktav-Filter soll z.B. durch Verschieben abhängig von seiner Lage weiterhin eine Oktave als Durchlassbereich besitzen und *keine* starre Bandbreite. Die Mittenfrequenz ist gegeben durch $f_m = \sqrt{f_u \cdot f_o}$. Bandpass-/Bandsperr-Filter ergeben sich aus Kombination von Hoch- und Tiefpass.

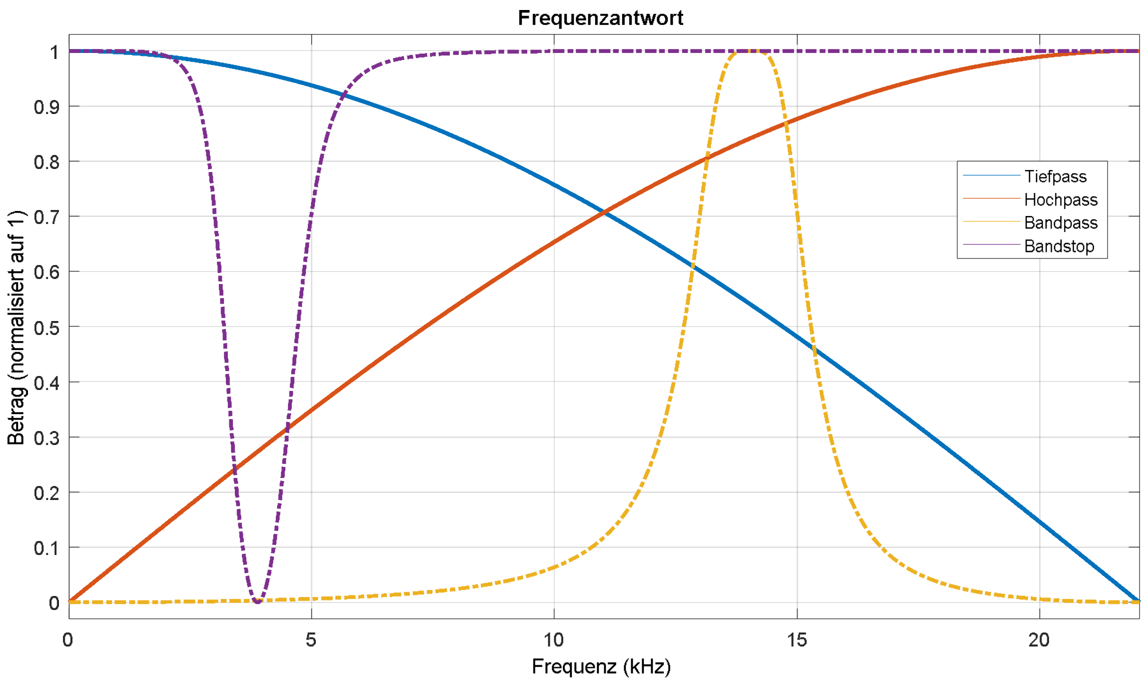


Abbildung 34: Frequenzgänge von Tiefpass, Hochpass, Bandpass und Bandstop, siehe MATLAB-Code 16: Filter_FreqResponse

[76] (Zölzer 2005) S. 121-125

Oktav-Filter besitzen eine Bandbreite von einer Oktave, also festgelegte Grenzfrequenzen $f_o = 2f_u$ um die Mittenfrequenz $f_m = \sqrt{f_u \cdot f_o} = \sqrt{2} \cdot f_u$ und $f_{m_i} = 2f_{m_{i-1}}$. Unterteilt man ein Signal in seine Oktav-Bänder und bewertet diese Bänder mit je einem Verstärkungsfaktor, so ergibt sich zur Klangeinstellung ein Oktav-Equalizer. Um zwischen den Bändern an den Übergängen keine Anhebung zu erzeugen, müssen jeweils zwei Oktav-Filter in Serie geschaltet werden (à -6dB bei der Grenzfrequenz jedes Bandes).

Terz-Filter sind in drei Teile zerlegte Oktav-Filter mit $f_o = \sqrt[3]{2} \cdot f_u$ und $f_m = \sqrt[6]{2} \cdot f_u$.

Man findet beispielsweise in Hifi-Verstärkern oder Beschallungsmischpulten sowohl grafische Equalizer mit Oktav- als auch mit Terz-Filtern, abhängig vom Anwendungsgebiet.

Shelving- und Peak-Filter sind Bewertungsfilter, sie besitzen also einen Verstärkungsfaktor als Gain. Es existiert kein Sperrbereich wie bei Tief-/Hoch- und Bandpass-Filtern. Shelving-Filter dienen zur Bewertung von hohen oder tiefen Frequenzen über eine Grenzfrequenz und den Gain (in dB). Peak-Filter lassen darüber hinaus eine Beeinflussung von Mittenfrequenz und Bandbreite zu. Ein Shelving-Filter basiert auf Hoch- bzw. Tiefpass parallel kombiniert mit einem Direktpfad. Der Peak-Filter basiert auf einem Bandpass-Filter, wiederum parallel kombiniert mit einem Direktpfad.[77]

Bewertungsfilter nehmen eine Frequenzbewertung vor und passen den Frequenzgang eines Signals dem menschlichen Hörempfinden an. Sie finden beispielsweise vor Signalpegelmessungen ihre Anwendung.

4.3 Darstellung digitaler Filter

4.3.1 LTI-Filter

Das Ausgangssignal von digitalen LTI-Filtern ergibt sich als Linearkombination der Samples eines Eingangssignals und den Samples der Rückführung des Ausgangs. Das Filter wird durch seine Koeffizienten vollständig charakterisiert, diese verändern sich nicht mit der Zeit. Die Differenzengleichung zur Beschreibung des Ausgangssignals im Zeitbereich lautet (siehe Gleichung (13)):

[77] (Zölzer 2005) S. 128, 132

$$y(m) = \sum_{k=1}^{N} a_k y(m-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(m-k)$$

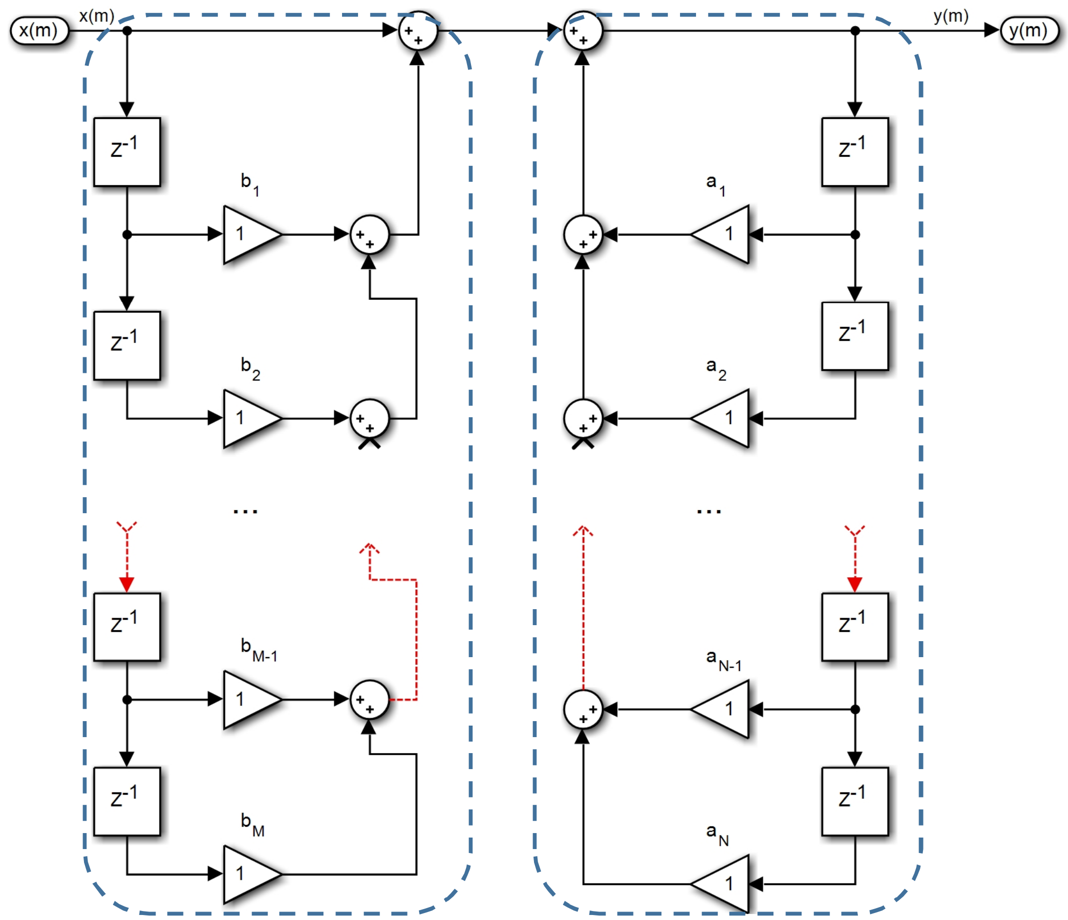
mit der zugehörigen Filter-Übertragungsfunktion im z-Bereich:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

(siehe 3.5.2 z-Übertragungsfunktion)

In das Ausgangssignal gehen also N vorherige Ausgangswerte, M vorherige Eingangswerte und der aktuelle Eingangswert mit ein. Der gewünschte Frequenzgang wird dann über Berechnung der Koeffizienten a_k und b_k erreicht. Dessen Darstellung erhält man mit $z = e^{j\omega}$. Die Ordnung eines Filters entspricht der größten zeitlichen Verzögerung z^{-k}, die in der z-Übertragungsfunktion auftaucht.[78]

$$\sum_{k=0}^{M} b_k x(m-k) \qquad \sum_{k=1}^{N} a_k y(m-k)$$



Nichtrekursiver Teil (nur Nullstellen) Rekursiver Teil (nur Polstellen)

Abbildung 35: Pol-Nullstellen-Filter mit Vorwärts- und Rückkopplungen, Filter N-ter bzw. M-ter Ordnung

[78] (Vaseghi 2007) S. 114-115

4.3.2 Nichtrekursive Filter (FIR-Filter)

Nichtrekursive Filter besitzen ein Ausgangssignal, das nur aus Samples des Eingangssignals und dessen zeitlicher Verzögerung aufgebaut ist. Der linke Teil von Abbildung 35 zeigt den Aufbau einer solchen vorwärtsgekoppelten Filterstruktur. Wie in den Kapiteln „Einfache Nullstelle" und „Nullstellenpaar" gezeigt wurde, ist die Impulsantwort von Feed-Forward-Filtern endlich, es handelt sich um FIR-Filter. Sie besitzen ausschließlich Nullstellen (bis auf den Ursprung). Dabei ist

$$y(m) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(m-k)$$

Das Ausgangssignal ist also eine Funktion des Eingangssignals, die Impulsantwort besteht aus $M + 1$ Samples. Die Ordnung des Filters ist M.[79] FIR-Filter sind stabile Systeme, unabhängig von den Filterkoeffizienten.

4.3.3 Rekursive Filter (IIR-Filter)

Rekursive Filter besitzen eine Rückführung des Ausgangs zum Eingangssignal. Die Ausgangsfunktion hängt also von aktuellen und vergangenen Eingangssignalwerten sowie von vorangegangenen Ausgangssignalwerten ab (siehe Gleichung (13)):

$$y(m) = \sum_{k=1}^{N} a_k y(m-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(m-k)$$

Diese Gleichung ist in Abbildung 35 in direkter Form dargestellt. Die Impulsantwort eines rekursiven Filters kann zwar stetig fallen und infinitesimal klein werden, sie kann jedoch für eine unendlich lange Zeitdauer vorhanden bleiben. Daher werden rekursive Filter auch IIR-Filter genannt. Sie besitzen Pol- und Nullstellen, im Spezialfall der reinen Rückkopplung ausschließlich Polstellen (bis auf den Ursprung). IIR-Filter können zu instabilen Systemen werden, falls die Polstellen außerhalb des Einheitskreises liegen.[80] Beim Filterentwurf ist also auf die Wahl der Koeffizienten zu achten.

---

[79] (Vaseghi 2007) S. 115
[80] (Vaseghi 2007) S. 116

4.4 Linearphasige FIR-Filter

Phasenverzerrungen in Systemen bewirken eine Veränderung der Signalform.[81] In der Tontechnik sind diese meist durch Auslöschungen oder Überbetonungen im Tieftonbereich wahrnehmbar, z. B. bei der Filterung eines Bass-Instruments. Sind diese Verzerrungen festzustellen, so bietet sich ein linearphasiges Filtersystem zur Problemlösung an.

Die Phasenverschiebung durch ein Filter entspricht einer Verzögerung, die von der Frequenz abhängt. Linearität der Phase bedeutet, dass die Frequenzen im Ausgangssignal zueinander das gleiche zeitliche Verhältnis besitzen wie die Frequenzen im Eingangssignal. Die Phase ist also eine lineare Funktion $\phi(f)$, abhängig von der Frequenz f. Die zeitliche Verzögerung um T Sekunden bewirkt eine Phasenverschiebung um $e^{-j2\pi Tf}$. Ein FIR-Filter M-ter Ordnung besitzt $M + 1$ Koeffizienten und bewirkt eine Verzögerung um $M/2$ Samples.[82]

Betrachtet wird ein FIR-Filter mit symmetrischer Impulsantwort $h(k)$:

$$h(k) := h(M-k), \qquad k = 0,1,\dots,M$$

Die Fourier-Transformierte dieser Impulsantwort entspricht der Frequenzantwort des Filters. Diese ergibt sich nach Kapitel 3.2.4 Diskretisierung der Fourier-Transformation zu:

$$H(f) = \sum_{k=0}^{M} h(k)e^{-j2\pi fk}$$

Diese Summe wird nun ausgeschrieben, $M + 1$ sei gerade:

$$H(f) = h(0) + h(1)e^{-j2\pi f} + h(2)e^{-j4\pi f} + \cdots + h(M-1)e^{-j2(M-1)\pi f} + h(M)e^{-j2M\pi f}$$

$$= e^{-jM\pi f}\left[h\left(\frac{M}{2}\right) + h(0)e^{jM\pi f} + h(M)e^{-jM\pi f} + h(1)e^{j(M-2)\pi f} + h(M-1)e^{-j(M-2)\pi f} + \cdots\right]$$

Über $h(0) = h(M)$, $h(1) = h(M-1)$ etc. ergeben sich:

$$h(0)e^{jM\pi f} + h(M)e^{-jM\pi f} = 2h(0)\cos(M\pi f)$$

und

$$h(1)e^{j(M-2)\pi f} + h(M-1)e^{-j(M-2)\pi f} = 2h(1)\cos((M-2)\pi f)$$

Dann lässt sich die Fourier-Transformierte vereinfachen:

[81] (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 325
[82] (Vaseghi 2007) S. 122

$$H(f) = e^{-jM\pi f}\left[h\left(\frac{M}{2}\right) + \sum_{m=0}^{(M-1)/2} 2h(m)\cos((M-2m)\pi f)\right]$$

Da der Term in den eckigen Klammern $H_a(f)$ (≙ Amplitudenfunktion) reellwertig ist, steckt die gesamte Phaseninformation dieser Fourier-Transformierten im Term $e^{-jM\pi f}$.

$H_a(f)$ kann ein negatives Vorzeichen annehmen. $H(f)$ kann nun geschrieben werden als $H(f) = H_a(f) \cdot e^{j\phi(f)}$. Für negative $H_a(f)$ kann man nun auch eine Phasenverschiebung von $\pm\pi$ schreiben. Die Phase lautet dann:

$$\phi(f) = \begin{cases} -M\pi f, & H_a(f) \geq 0 \\ -M\pi f \pm \pi, & H_a(f) < 0 \end{cases}$$

An den Nulldurchgängen von $H_a(f)$ treten dann durch die Verschiebung Phasensprünge auf. Allgemein ist die Phase des FIR-Filters mit symmetrischer Impulsantwort demnach eine *lineare Funktion* von f, deren Steigung von der Filterordnung M abhängt.[83] [84]

Die z-Transformierte $H(z)$ der eingangs definierten symmetrischen Impulsantwort $h(k)$ lässt sich nach Kapitel 3.4.1 Heranführung folgendermaßen aufstellen:

$$\begin{aligned} H(z) = \sum_{m=0}^{M} h(m)z^{-m} &= h(0) + h(1)z^{-1} + \cdots + h(M)z^{-M} \\ &= h(M) + h(M-1)z^{-1} + \cdots + h(0)z^{-M} \\ &= z^{-M} \sum_{m=0}^{M} h(m)z^{m} = z^{-M} H(\frac{1}{z}) \end{aligned}$$

Nimmt man nun eine Nullstelle von $H(z)$ in $z = z_1$ an, so ergibt sich eine zugehörige Nullstelle für $z = \frac{1}{z_1}$.

Über den Fundamentalsatz der Algebra lässt sich $H(z)$ in Form der Nullstellen faktorisieren. Für reellwertige Koeffizienten $h(0) \dots h(M)$ treten die Nullstellen außerdem zusätzlich in konjugiert komplexer Form auf. Hierzu kommen schließlich noch die oben gefundenen reziproken Nullstellen, sodass sich die folgende Faktorisierung ergibt:

$$H(z) = G \cdot (1 - z_1 z^{-1})(1 - \overline{z_1} z^{-1})\left(1 - \frac{1}{z_1} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{\overline{z_1}} z^{-1}\right) \dots$$ [85]

[83] (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 329-330
[84] (Vaseghi 2007) S. 122-123
[85] (Vaseghi 2007) S. 123

Hieraus und über die Euler-Darstellung $z_k = r_k e^{j\phi_k}$ ergeben sich also für die k-te Nullstelle z_k insgesamt vier Nullstellen zu einem Quadrupel:

- Die Nullstelle z_k mit Radius r_k und der Phasenlage ϕ_k
- Die dazu konjugiert komplexe Nullstelle $\overline{z_k}$ mit gleichem Radius r_k und der dazu an der reellen Achse gespiegelten Phasenlage $-\phi_k$
- Die zu z_k reziproke Nullstelle $z_k^{-1} = \frac{1}{r_k} e^{-j\phi_k}$ mit dem Radius $\frac{1}{r_k}$ und der Phasenlage $-\phi_k$
- Die dazu konjugiert komplexe Nullstelle $\overline{z_k^{-1}}$ mit gleichem Radius $\frac{1}{r_k}$ und der dazu an der reellen Achse gespiegelten Phasenlage ϕ_k

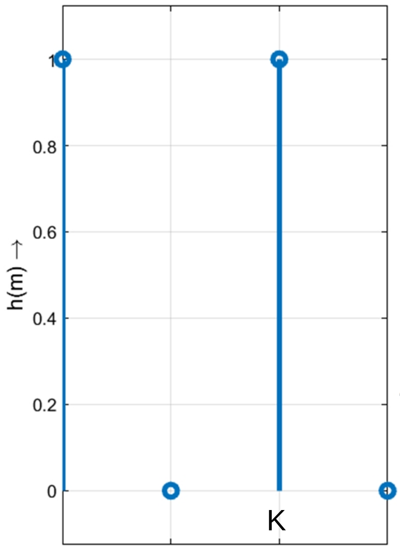


Abbildung 37: Impulsantwort LinearPhaseFIR

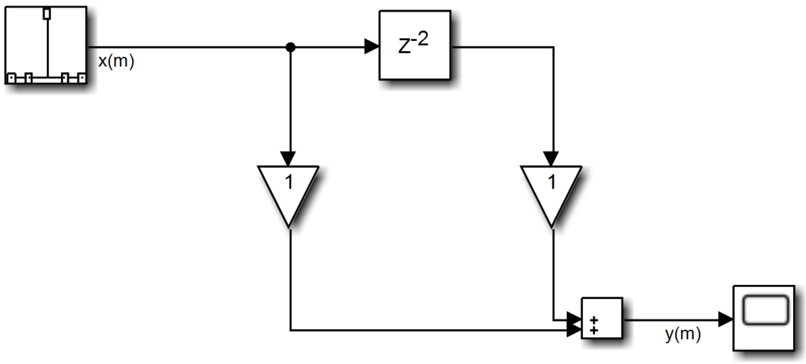


Abbildung 36: LinearPhaseFIR mit $K = 2$

Beispielrechnung[86]

Es sei die Impulsantwort aus Abbildung 37 des Filters aus Abbildung 36 gegeben durch

$$h(m) = \delta(m) + \delta(m - K)$$

Dessen Frequenzantwort lässt sich, wie oben in allgemeiner Darstellung gezeigt, über die Fourier-Transformation der Impulsantwort errechnen:

$$H(f) = \sum_{m=0}^{M} h(m)e^{-j2\pi mf} = 1 + e^{-j2K\pi f} = e^{-jK\pi f}(e^{jK\pi f} + e^{-jK\pi f}) = e^{-jK\pi f} 2\cos(K\pi f)$$

Der Betragsfrequenzgang $|H(f)|$ ergibt sich zu einer Betragsschwingung des Kosinus mit doppelter Amplitude, hat also die Form eines Kammfilters. Der lineare Phasengang $\phi(f)$ des Filters ergibt sich aus obiger Darstellung.

$$|H(f)| = \left|e^{-jK\pi f} 2\cos(K\pi f)\right| = |2\cos(K\pi f)|$$

[86] (Vaseghi 2007) S. 126-127

$$\phi(f) = \begin{cases} -K\pi f, & \cos(K\pi f) \geq 0 \\ -K\pi f + \pi, & \cos(K\pi f) < 0 \end{cases}$$

Frequenz- und Phasengang sind im Bode-Diagramm in Abbildung 38 dargestellt.

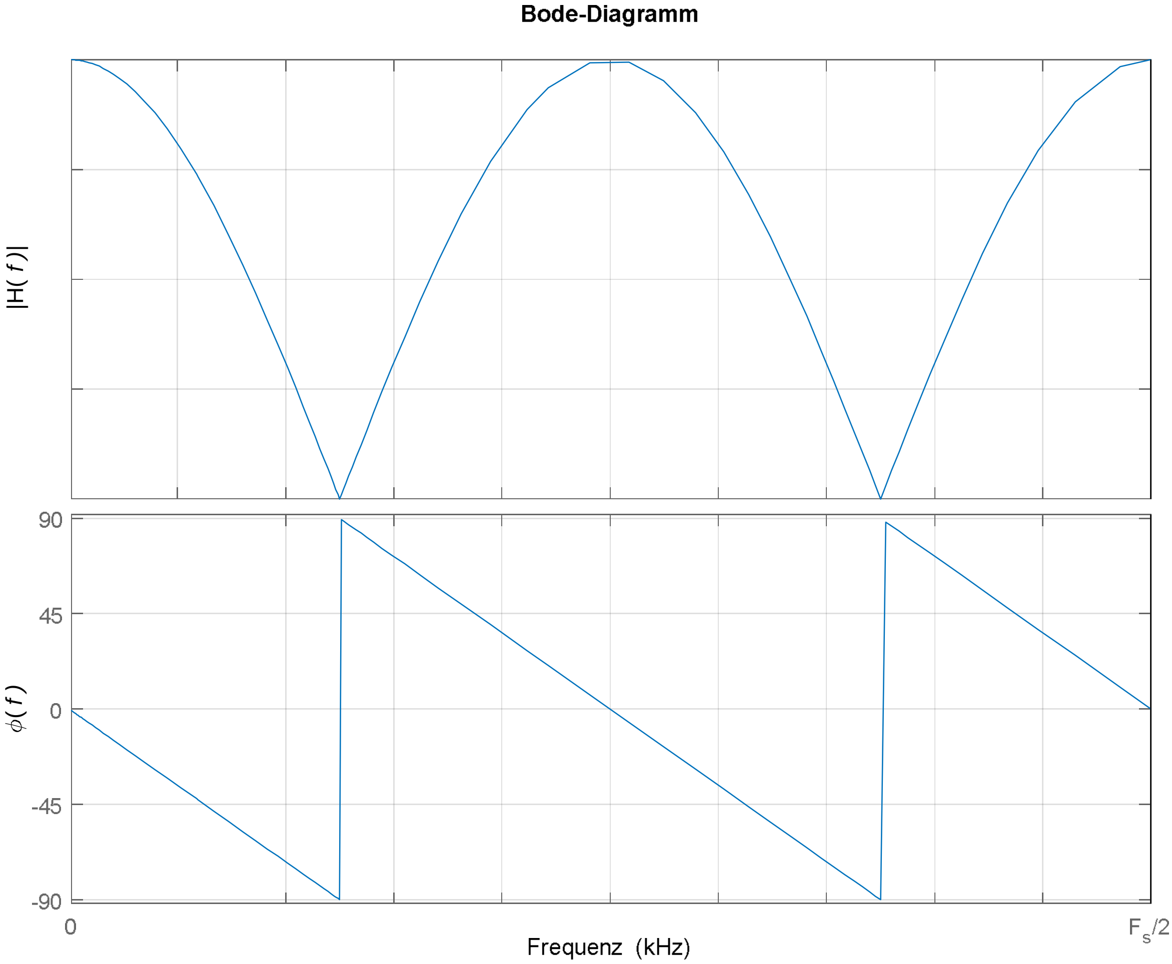


Abbildung 38: Betragsfrequenz- und Phasengang, Beispielrechnung linearphasiger FIR-Filter

4.5 FIR-Filter-Design: Fensterung und inverse Fourier-Transformation

Mithilfe der inversen Fourier-Transformation der gewünschten Frequenzantwort lassen sich FIR-Filter mit zugehörigen Koeffizienten entwerfen. FIR-Filter werden nach Kapitel 4.3.2 Nichtrekursive Filter (FIR-Filter) als Ausgangssignal $y(m) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(m-k)$ dargestellt, das sich aus dem zeitlich verzögerten und über Filterkoeffizienten b_k gewichteten Eingangssignal zusammensetzt. Wird das Filter mit einem Impuls angeregt, so finden sich am Ausgang für M Samples die Filterkoeffizienten in aufsteigender Reihenfolge. Das

Ausgangssignal kann dann umgeschrieben werden in $y(m) = \sum_{k=0}^{M} h(k)x(m-k)$ mit der Impulsantwort $h(k)$. Die Filterung ist also eine Faltung der Impulsantwort mit dem Eingangssignal. Die Impulsantwort enthält die Information über die Dimensionierung der Koeffizienten.

Impulsantwort $h(m)$ und Frequenzantwort $H(f)$ sind jedoch über die Fourier-Transformation miteinander verknüpft:

$$H(f) = \sum_{m=0}^{M} h(m)e^{-j2m\pi f}$$

$$h(m) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H(f)e^{j2m\pi f}\, df$$

Die Impulsantwort besitzt allerdings zunächst keine endliche Länge, da m beliebig groß werden kann und das Integral für jedes m einen Wert annimmt. Zudem besitzt die Impulsantwort auch Funktionswerte für $m < 0$, das resultierende Filtersystem wäre somit nicht kausal und kein FIR-Filter. Multipliziert man die gefundene Impulsantwort anschließend mit einer Fensterfunktion der Länge $M + 1$, die im nicht gefensterten Bereich den Wert null besitzt, so wird die endliche Länge gewährleistet und die Impulsantwort wird zentriert um $m = 0$. Eine Verschiebung der Impulsantwort um die halbe Fensterbreite in Richtung positiver Zeitachse beseitigt auch die Nichtkausalität.

Der Filterentwurf unterteilt sich also in folgende Schritte:

- Gewünschte Frequenzantwort $H(f)$ definieren
- Filterordnung M festlegen
- Fourier-Rücktransformation der Frequenzantwort liefert die Impulsantwort $h(m)$
- Fensterung und Verschiebung liefern die gesuchte Impulsantwort und damit die Filterkoeffizienten b_k[87]

Ein Fenster ist dabei eine Folge $w(m)$, deren Signalenergie im endlichen Zeitraum der Fensterlänge konzentriert ist. Es existieren verschiedene Typen von Fenstern mit unterschiedlichen Eigenschaften und Auswirkungen auf das zu fensternde Signal. Ein Rechteckfenster ist beispielsweise $w(m) = \begin{cases} 1, & n = 0, \dots, M \\ 0, & sonst \end{cases}$. Abbildung 39 zeigt verschiedene Fenstertypen und deren Spektren. Diese besitzen unterschiedliche Sperr- und Durchlasseigenschaften, die in der Praxis dann abgewogen werden müssen.[88]

[87] (Vaseghi 2007) S. 128-129
[88] (Puente León, Kiencke und Jäkel 2011) S. 342-349

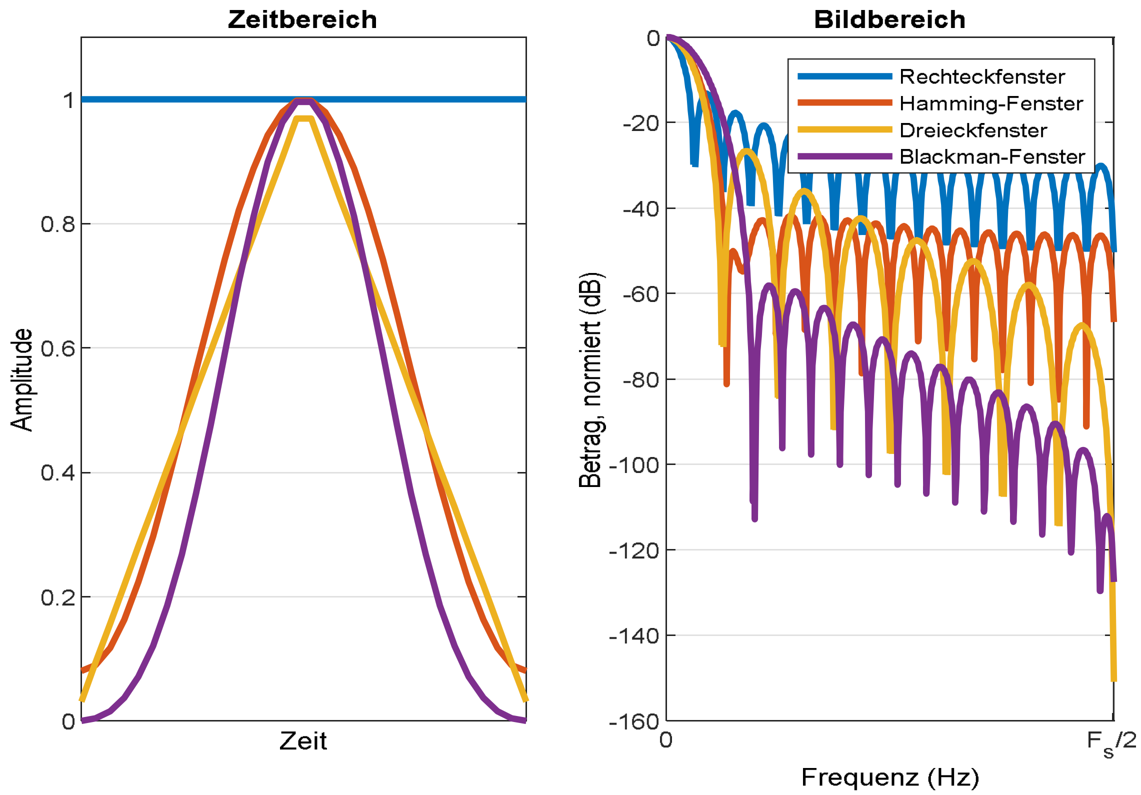
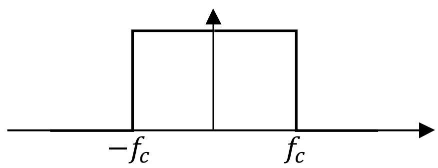


Abbildung 39: Zeitbereich und Spektren verschiedener Fenstertypen

4.5.1 Beispielrechnung: Tiefpass-FIR-Filter[89]

Es sei F_s die Sampling-Frequenz, f_c die Cut-Off-Frequenz des gewünschten Filtersystems. Daraus ergibt sich für einen Tiefpass die Frequenzantwort

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| < f_c \\ 0, & sonst \end{cases}$$



Die Impulsantwort wird über die inverse Fourier-Transformation geliefert:

$$h(m) = \int_{-\frac{f_c}{F_s}}^{\frac{f_c}{F_s}} 1e^{j2\pi fm}\, df = \left[\frac{e^{j2\pi fm}}{j2\pi m}\right]_{-\frac{f_c}{F_s}}^{\frac{f_c}{F_s}} = \frac{\sin(2\pi m\frac{f_c}{F_s})}{\pi m}$$

Die Impulsantwort $h(m)$ ist nicht kausal, da sie für $m < 0$ existiert. Zudem ist sie unendlich lange. Um nun einen FIR-Filter mit der Filterordnung M zu erzeugen, wird die Impulsantwort mit einem Rechteckfenster der Samplelänge $M + 1$ multipliziert und um $M/2$ nach rechts verschoben:

---

[89] (Vaseghi 2007) S. 130, 132

$$h(m) = \frac{\sin(2\pi(m-\frac{M}{2})\frac{f_c}{F_s})}{\pi(m-\frac{M}{2})}, \qquad 0 \le m \le M$$

Diese Impulsantwort ist für $m = \frac{M}{2}$ nicht definiert $(\frac{0}{0})$. Nach der Regel von l'Hospital[90] gilt für den 0/0-Fall: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$ und somit für die Impulsantwort mit dem Argument des Sinus $x := \pi\left(m - \frac{M}{2}\right)$ in Annäherung an die Definitionslücke:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2\frac{f_c}{F_s}x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\frac{f_c}{F_s}\cos(2\frac{f_c}{F_s}x)}{1} = 2\frac{f_c}{F_s} = 0.5$$

mit $f_c = \frac{F_s}{4}$, wie für die Darstellung in Abbildung 40 benutzt. (Weitere Beispiele siehe Anhang)

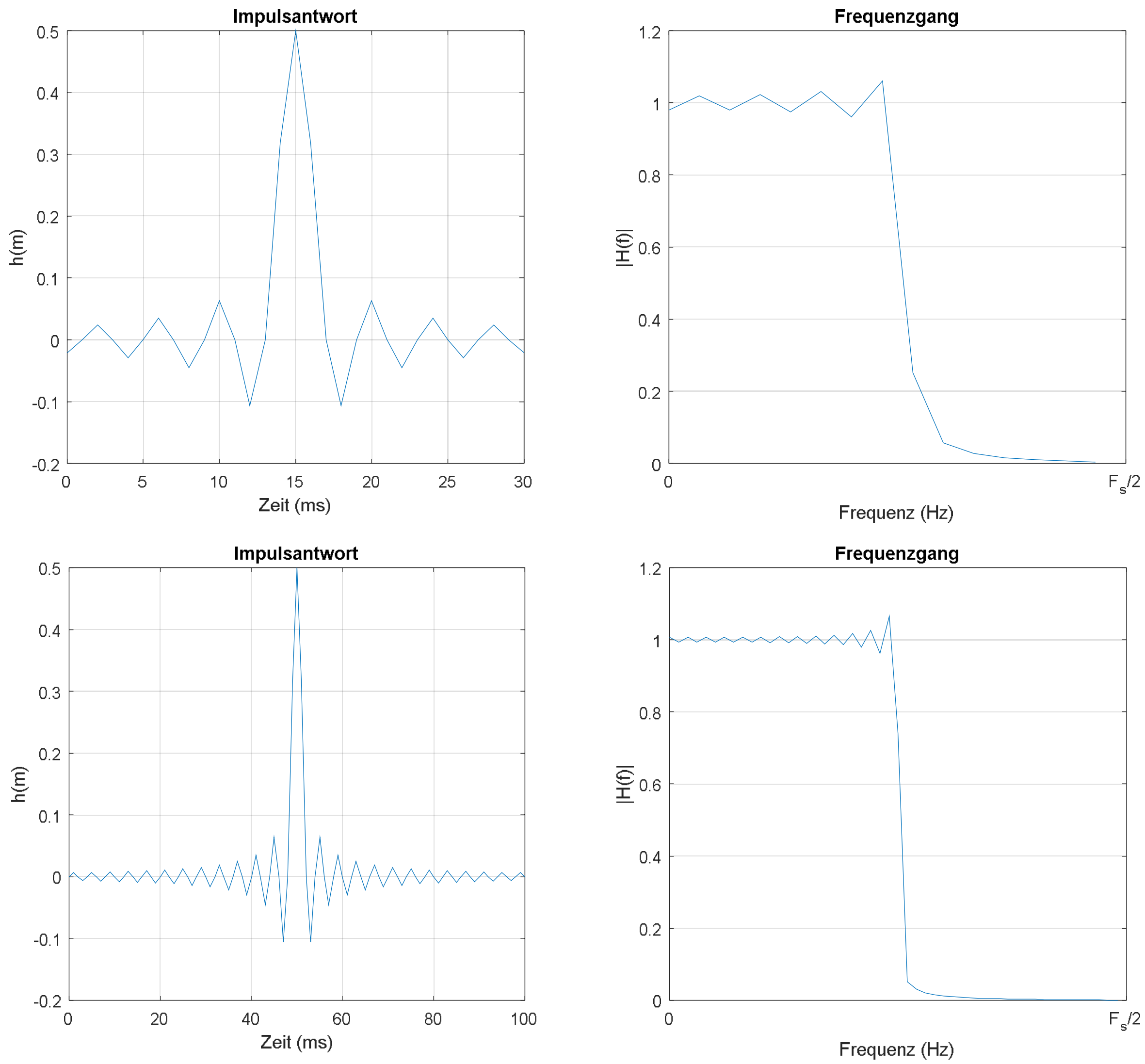


Abbildung 40: Impulsantwort und Frequenzgang Tiefpass-FIR-Filter mit M = 30 (oben) und M = 100 (unten), siehe MATLAB-Code 18: Tiefpass

---

[90] (Merziger und Wirth 2010) S. 273

4.6 IIR-Filter-Design: Pol-Nullstellen-Platzierung

Wie in Kapitel 3.5.3 Pol- und Nullstellen bereits behandelt, weisen Pol- und Nullstellen einer Systemübertragungsfunktion die folgenden Eigenschaften auf: Komplexe Polstellenpaare bewirken eine Resonanz im Frequenzbereich, komplexe Nullstellenpaare dagegen resultieren in „Tiefen“ bzw. Einschnitten des Frequenzbereichs.[91] Das folgende Berechnungsbeispiel soll das Vorgehen bei der Pol- und Nullstellen-Platzierung mit Ziel einer gewünschten Filterwirkung anschaulich machen.

4.6.1 Beispielrechnung: Bandsperr-IIR-Filter (Notch-Filter)[92]

Es soll ein Bandsperr-Filter berechnet werden. Die Samplerate sei F_s = 44,100Hz, die herauszufilternde Mittenfrequenz soll bei $F_s/4$ = 11,025Hz liegen. Die Bandbreite bei der 3dB-Grenzfrequenz soll 100Hz betragen. Für 0Hz und $F_s/2$ = 22,050Hz soll keine Abschwächung vorliegen.

Der Radiant, also die Lage der Pol- bzw. Nullstellen und die relevanten Frequenzen im Bogenmaß (bezogen auf den Einheitskreis), errechnet sich über $\omega = 2\pi f/F_s$. 0Hz, 11,025Hz und 22,050Hz entsprechen demnach 0, $\pi/2$ und π rad. Für die Übertragungsfunktion $H(z)$ gilt also folgendes: $H(0) = H(\pi) = 1$ und $H(\pi/2) = 0$. Die Grenzfrequenzen liegen bei 10,975Hz und 11,075Hz, im Bogenmaß ausgedrückt:

$$\phi_L^{3dB} = \frac{2\pi}{44{,}100} 10{,}975 = \frac{439\pi}{882}, \qquad \phi_H^{3dB} = \frac{2\pi}{44{,}100} 11{,}075 = \frac{443\pi}{882}$$

Um an der Mittenfrequenz $F_s/4$, also beim Winkel $\pi/2$, vollständige Auslöschung zu erreichen, benötigt man ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen. Deren Radius soll gleich 1 sein, somit ist deren Lage gegeben durch $1 \cdot e^{\pm j\pi/2}$. Daraus lässt sich die z-Übertragungsfunktion schreiben:

$$H(z) = \left(1 - e^{j\pi/2} z^{-1}\right)\left(1 - e^{-j\pi/2} z^{-1}\right) = 1 - z^{-2}$$

mit $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ über Euler-Darstellung des Kosinus.

---

[91] (Vaseghi 2007) S. 145

[92] (Vaseghi 2007) S. 146-147

Um die Bandbreite kontrollieren zu können, wird an die gleiche Winkelposition ein komplexes Polstellenpaar gesetzt. Dessen Radius ist ein Maß für die Bandbreite. Je näher die Polstellen an den Einheitskreis gelangen, desto mehr greift deren Resonanzwirkung bei naheliegenden Frequenzen. Die Nullstellen löschen die Mittenfrequenz komplett aus. Die umliegenden Frequenzen werden jedoch durch die Polstellenlage stärker (bei Radius gegen 1) bzw. schwächer (bei geringem Radius kleiner 1, also geringerer Einwirkung der Pole) beeinflusst. Die Polstellen bewirken eine den Nullstellen entgegengesetzte Wirkung, die (bis auf die Mittenfrequenz mit Wert null) den Grad der Abschwächung der umliegenden Frequenzen beeinflusst. Die um die Polstellen (siehe Nenner) ergänzte z-Übertragungsfunktion ergibt sich analog zum Zähler zu:

$$H(z) = g\frac{1 + z^{-2}}{1 + r^2 z^{-2}}$$

Setzt man die Bedingung $H(0) = 1$ oder $H(\omega = \pi) = 1$ für $z = e^{j\omega}$ ein, so ergibt sich

$$H(0) = g\frac{1 + e^0}{1 + r^2 e^0} = 1 \rightarrow g = 0.5(1 + r^2)$$

An der 3dB-Grenzfreqenz hat die Frequenzantwort den Wert $1/\sqrt{2} \approx 0.7071$, diese findet sich für $\omega = \phi_H^{3dB} = 443\pi/882$, für die Frequenzantwort gilt dann:

$$H\left(\frac{443\pi}{882}\right) = g\frac{1 + e^{\frac{-j443\pi}{441}}}{1 + r^2 e^{\frac{-j443\pi}{441}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Mit $g = 0.5(1 + r^2)$ ergibt sich über Quadrierung beider Seiten:

$$0.25(1 + r^2)^2 \left|\frac{1 + e^{\frac{-j443\pi}{441}}}{1 + r^2 e^{\frac{-j443\pi}{441}}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

mit $r \approx 0.9929$ (berechnet über (Wolfram Alpha - Lösung für r 2018)) und $g \approx 0.9929$ (berechnet über (Wolfram Alpha - Lösung für g 2018)). Damit ist die Filterübertagungsfunktion

$$H(z) = g\frac{1 + z^{-2}}{1 + r^2 z^{-2}}$$

mit den Systemkoeffizienten g und r gegeben.

5 Machbarkeitsanalyse und Fazit

Die Grundlagen der digitalen Audiosignalverarbeitung, die in dieser Abschlussarbeit behandelt wurden, sind thematisch sehr umfangreich. Im zeitlich vorgegebenen Rahmen zur Bearbeitung einer Bachelor-Thesis ist ein fundamentaler Einblick in die Thematik durchaus möglich. Hinzuzufügen ist jedoch, dass eine komplett eigenständige Erörterung des Themenkomplexes unter Erstellung eigener Beispiele und vollständiger Herleitung sämtlicher Voraussetzungen erstens nicht Ziel dieser Ausarbeitung war, zweitens auch nicht als machbar erschien. Das „Entlanghangeln" an Herangehensweisen, Herleitungen und Beispielen aus der benutzten Literatur war also notwendig. Ein Eigenanteil beim Erstellen dieser Arbeit besteht dennoch, da vieles über die Literatur hinaus recherchiert und zum Verständnis nachvollzogen werden musste. Ein erneutes Hineinfinden in Berechnungswege und Umformungsschritte war außerdem erforderlich. Weiterhin stellte die Einarbeitung in MATLAB zur grafischen Aufbereitung der theoretischen Ansätze eine Herausforderung dar.

Die Erläuterung der mathematischen Grundlagen, ergänzt um Berechnungsbeispiele, nimmt in dieser Ausarbeitung einen größeren Teil ein als ursprünglich angenommen. Jedoch greifen die benutzten Beispiele einige Themen vorweg – mit dem Ziel, den Einstieg in das Kapitel der digitalen Filterung leichter zu gestalten.

Diese Bachelor-Thesis ist, wie einleitend beschrieben, als Brücke gedacht zwischen den an der HdM vermittelten, sehr praxisnahen Inhalten und der Signal- und Systemtheorie, welche grundlegend für die digitale Audiosignalverarbeitung ist. Ein allumfassendes Werk zu schaffen war nicht geplant. Vielmehr soll diese Ausarbeitung Inhalte vermitteln bzw. aufarbeiten, die zum Verständnis weiterführender Literatur benötigt werden und den Einstieg in die Weiterbildung im Bereich der Signalverarbeitung erleichtern.

Anhang

B

Nebenrechnung 1: Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe

Diese Herleitung wurde aus (Papula 2009) *S. 174-176 entnommen.*

Zur Herleitung der komplexen Darstellungsform der Fourier-Reihe wird zunächst von der reellen Form (3) ausgegangen, die trigonometrischen Funktionen $\cos(k\omega_0 t)$ und $\sin(k\omega_0 t)$ werden mithilfe der komplexen e-Funktion wie folgt ersetzt:

$$\cos(k\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}\right)$$

$$\sin(k\omega_0 t) = \frac{1}{2j}\left(e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}\right) = -\frac{1}{2}j\left(e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}\right)$$

Eingesetzt in die reelle Form (3):

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}a_k\left(e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}\right) - \frac{1}{2}jb_k\left(e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}\right)\right]$$

Vereinfachung des Arguments der Summe:

$$\frac{1}{2}a_k\left(e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}\right) - \frac{1}{2}jb_k\left(e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}a_k - \frac{1}{2}jb_k\right)e^{jk\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2}jb_k\right)e^{-jk\omega_0 t}$$

$$= \frac{1}{2}(a_k - jb_k)e^{jk\omega_0 t} + \frac{1}{2}(a_k + jb_k)e^{-jk\omega_0 t}$$

Einsetzen und Aufspalten der Summe in zwei Teilsummen ergibt dann:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_k - jb_k)e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_k + jb_k)e^{-jk\omega_0 t}$$

Mit den Abkürzungen

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k), \qquad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k)$$

erhält man schließlich:

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-jk\omega_0 t}$$

D

Man beachte: c_k und c_{-k} sind zueinander konjugiert komplex: $c_{-k} = \overline{c_k}$

Die Indizes der beiden Summen laufen jeweils von $k = 1$ bis $k = \infty$. Aus der zweiten Summe lässt sich durch die beiden Minuszeichen eine analoge Summe von $k = -1$ bis $k = -\infty$ bilden, indem man ebendiese Minuszeichen weglässt:

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Damit sind bis auf den Wert $k = 0$ zunächst alle Summanden in den beiden Teilsummen vorhanden. Da $e^{jk\omega_0 t}$ für $k = 0$ den Wert $e^0 = e^{j0\omega_0 t} = 1$ annimmt, kann man den konstanten Summanden c_0 auch in der Form $c_0 = c_0 \cdot e^{j0\omega_0 t}$ schreiben und die beiden Teilsummen lassen sich zu einer unendlichen Summe zusammenfassen, k läuft dann von $-\infty$ bis ∞:

$$x(t) = \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Nebenrechnung 2: Komplexe Darstellung der Fourier-Koeffizienten

Diese Herleitung wurde aus (Papula 2009) *S. 176-177 entnommen.*

Zur Herleitung der komplexen Fourier-Koeffizienten c_k wird die Gleichung (6) beiderseits mit $e^{-jl\omega_0 t}$ multipliziert und gliedweise über das Periodenintervall 2π integriert (ω_0 = 1).

$$\int_0^{2\pi} x(t)e^{-jl\omega_0 t}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}\Big) e^{-jl\omega_0 t}\,dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} c_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jl\omega_0 t}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_0^{2\pi} e^{j(k-l)\omega_0 t}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_0^{2\pi} e^{jn\omega_0 t}\,dt$$

(mit $n = k - l$)

Unter dem Integral sind nun die beiden Fälle $n = 0$ und $n \neq 0$ zu unterscheiden.

1. Fall: $n = 0$, d.h. $k = l$:

$$\int_0^{2\pi} e^{j0\omega_0 t}\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = [x]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

2. Fall: $n \neq 0$, d.h. $k \neq l$:

$$\int_0^{2\pi} e^{jn\omega_0 t}\,dt = \left[\frac{e^{jn\omega_0 t}}{jn\omega_0}\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{jn\omega_0 2\pi} - e^0}{jn\omega_0} = \frac{e^{jn\omega_0 2\pi} - 1}{jn\omega_0}$$

Mit der Eulerschen Formel kann man $e^{jn\omega_0 2\pi}$ folgendermaßen berechnen:

$$e^{jn\omega_0 2\pi} = \cos(n\omega_0 2\pi) + j\sin(n\omega_0 2\pi) = \cos(0) + j\sin(0) = 1$$

Also verschwindet das Integral für $n \neq 0$:

$$\int_0^{2\pi} e^{jn\omega_0 t}\,dt = \frac{1-1}{jn\omega_0} = 0$$

F

Daraus folgt:

$$\int_0^{2\pi} e^{j(k-l)\omega_0 t}\,dt = \begin{cases} 2\pi, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

In obiger Ausgangsgleichung existiert also nur der Summand für $k = l$. Daher gilt:

$$\int_0^{2\pi} x(t)e^{-jl\omega_0 t}\,dt = \int_0^{2\pi} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = c_k \cdot 2\pi$$

Hieraus erhält man durch Umformung die Berechnungsvorschrift der komplexen Fourier-Koeffizienten:

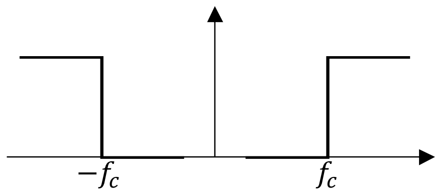
$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

Beispielrechnung 1: Hochpass-FIR-Filter

Dieses Beispiel zum Filterdesign wurde aus (Vaseghi 2007) *S. 133-134 entnommen.*

Der gewünschte Frequenzgang eines Hochpass-Filters sei gegeben durch

$$H(f) = \begin{cases} 0, & |f| < f_c \\ 1, & sonst \end{cases}$$



Die Impulsantwort ergibt sich aus der inversen Fourier-Transformation des Frequenzgangs:

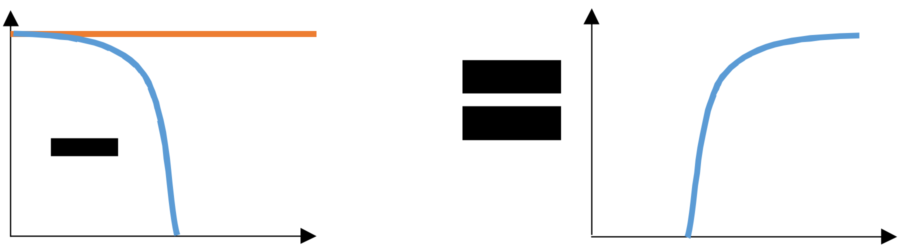
$$h(m) = \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{f_c}{F_s}} 1 \cdot e^{j2m\pi f}\, df + \int_{\frac{f_c}{F_s}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{j2m\pi f}\, df = \left[\frac{e^{j2m\pi f}}{j2m\pi}\right]_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{f_c}{F_s}} + \left[\frac{e^{j2m\pi f}}{j2m\pi}\right]_{\frac{f_c}{F_s}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sin(\pi m)}{\pi m} - \frac{\sin(2\pi m \frac{f_c}{F_s})}{\pi m}$$

Kausalität und Endlichkeit der Impulsantwort wird über Multiplikation mit einem Rechteck-Fenster der Länge $M + 1$ und anschließender Verschiebung um $M/2$ Samples erreicht:

$$h(m) = \frac{\sin(\pi(m - \frac{M}{2})}{\pi(m - \frac{M}{2})} - \frac{\sin\left(2\pi\left(m - \frac{M}{2}\right)\frac{f_c}{F_s}\right)}{\pi\left(m - \frac{M}{2}\right)}, \qquad 0 \le m \le M$$

Vergleicht man nun den rechten Subtrahenden mit dem Ergebnis aus Kapitel 4.5.1 Beispielrechnung: Tiefpass-FIR-Filter, so lässt sich dieser Subtrahend als Impulsantwort des Tiefpasses identifizieren. Der linke Subtrahend entspricht einem Allpass-Filter. Ein Hochpass-FIR-Filter besitzt also die Impulsantwort eines Allpass-Filters abzüglich der eines Tiefpass-Filters. Das Abziehen des Tiefpass-Filters vom Allpass-Filter ergibt im Durchlassbereich des Tiefpasses eine Differenz von null, anschließend wächst die Differenz im Bereich um die Cut-Off-Frequenz und geht in Richtung hoher Frequenzen in einen Durchlassbereich über.

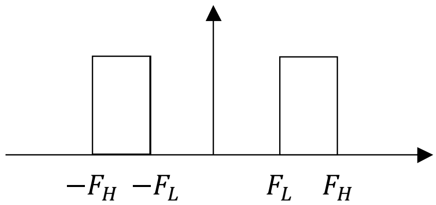


Beispielrechnung 2: Bandpass-FIR-Filter

Dieses Beispiel zum Filterdesign wurde aus (Vaseghi 2007) *S. 134-135 entnommen.*

Ein Bandpass-Filter habe die Frequenzantwort

$$H(f) = \begin{cases} 1, & F_L < |f| < F_H \\ 0, & sonst \end{cases}$$



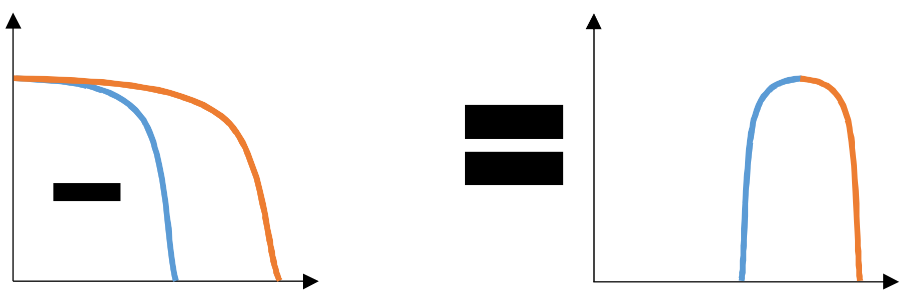
Dabei sind F_L und F_H die obere bzw. untere Cut-Off-Frequenz. Die Impulsantwort des Filters errechnet sich über Fourier-Rücktransformation zu

$$h(m) = \int_{-\frac{F_H}{F_s}}^{-\frac{F_L}{F_s}} 1 \cdot e^{j2m\pi f}\, df + \int_{\frac{F_L}{F_s}}^{\frac{F_H}{F_s}} 1 \cdot e^{j2m\pi f}\, df = \frac{\sin\left(2\pi m \frac{F_H}{F_s}\right)}{\pi m} - \frac{\sin(2\pi m \frac{F_L}{F_s})}{\pi m}$$

und nach Fensterung und Verschiebung zu

$$h(m) = \frac{\sin\left(2\pi(m - \frac{M}{2})\frac{F_H}{F_s}\right)}{\pi(m - \frac{M}{2})} - \frac{\sin\left(2\pi\left(m - \frac{M}{2}\right)\frac{F_L}{F_s}\right)}{\pi\left(m - \frac{M}{2}\right)}, \qquad 0 < m < M$$

Hier lässt sich nun erkennen, dass es sich bei den beiden Subtrahenden um Impulsantworten von Tiefpass-Filtern handelt. Diese besitzen unterschiedliche Cut-Off-Frequenzen. Das Abziehen des Filters mit der tieferen Cut-Off-Frequenz F_L ergibt im Durchlassbereich eine Differenz von null, im Übergangsbereich ein Passband, anschließend (für höhere Frequenzen) erneut gegenseitige Auslöschung.

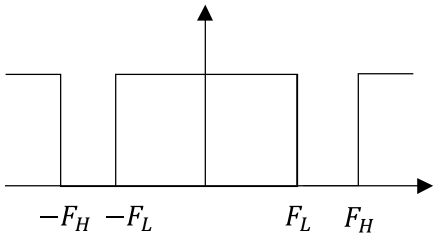


Beispielrechnung 3: Bandsperr-FIR-Filter

Dieses Beispiel zum Filterdesign wurde aus (Vaseghi 2007) *S. 135-136 entnommen.*

Der Frequenzgang des Bandsperr-Filters sei gegeben durch

$$H(f) = \begin{cases} 0, & F_L < |f| < F_H \\ 1, & sonst \end{cases}$$



Über die Fourier-Rücktransformation erhält man die Impulsantwort des Filters.

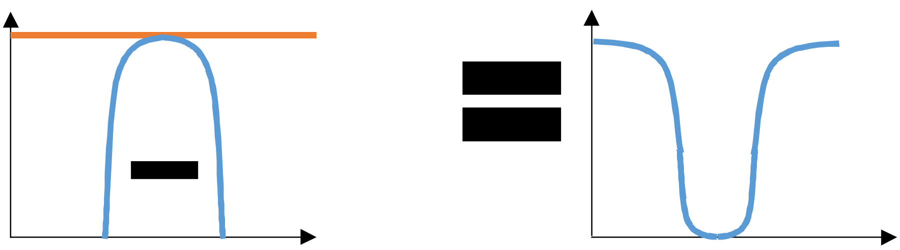
$$h(m) = \int_{-\frac{1}{2}}^{-F_H/F_s} 1 \cdot e^{jm2\pi f}\,df + \int_{-\frac{F_L}{F_s}}^{\frac{F_L}{F_s}} 1 \cdot e^{jm2\pi f}\,df + \int_{\frac{F_H}{F_s}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{jm2\pi f}\,df$$

$$= \frac{\sin(\pi m)}{\pi m} - \frac{\sin\left(2\pi m \frac{F_H}{F_s}\right)}{\pi m} + \frac{\sin\left(2\pi m \frac{F_L}{F_s}\right)}{\pi m}$$

Über Multiplikation mit einem Rechteckfenster der Länge $M + 1$ und anschließende Verschiebung um $M/2$ nach rechts wird die Endlichkeit der Impulsantwort sowie die Kausalität des Filters erreicht:

$$h(m) = \frac{\sin(\pi(m - \frac{M}{2}))}{\pi(m - \frac{M}{2})} - \left(\frac{\sin\left(2\pi\left(m - \frac{M}{2}\right)\frac{F_H}{F_s}\right)}{\pi\left(m - \frac{M}{2}\right)} - \frac{\sin\left(2\pi\left(m - \frac{M}{2}\right)\frac{F_L}{F_s}\right)}{\pi\left(m - \frac{M}{2}\right)} \right)$$

Der erste Subtrahend entspricht der Impulsantwort eines Allpass-Filters. Die beiden Brüche in der großen Klammer entsprechen dem Ergebnis des vorherigen Kapitels (Beispielrechnung 2: Bandpass-FIR-Filter), es handelt sich dabei um die Impulsantwort eines Bandpass-Filters. Von einem Allpass wird also ein Bandpass mit zwei Cut-Off-Frequenzen F_H und F_L subtrahiert, um eine Bandsperre zu erhalten.



J

MATLAB-Code 1: PeriodischerRechteckimpuls

```
% A_1_PeriodischerRechteckimpuls
% A_1_PeriodischerRechteckimpuls.m * JK * 01/06/2018
% Zeichnet einen periodischen Rechteckimpuls mit dem
% Tastverhältnis 0.5

%Samples
t = 0:.01:4*pi;
%Wiederholungensfrequenz pi
d = 0:2*pi:4*pi;
%Pulszug: Pulslänge pi, Verschiebung pi/2
y = 2*(pulstran(t, d+pi/2, 'rectpuls', pi) -0.5);

%Grafik & Beschriftung
plot(t, y), grid
axis([0 4*pi -1.3 1.3])
xlabel('t \rightarrow')
ylabel('x(t) \rightarrow')
title('Periodischer Rechteckimpuls')
```

L

MATLAB-Code 2: PeriodischerRechteckimpuls_FourierSynthese

```
% A_2_PeriodischerReckteckimpuls_Linienspektrum
% A_2_PeriodischerRechteckimpuls_Linienspektrum.m * JK * 10/06/2018
% Zeichnet das zugehörige Linienspektrum für einen periodischen
% Rechteckimpuls
% und N Näherungen, angenähert mithilfe der Fourier-Reihe

%Samples
t = 0:.01:4*pi;
%Wiederholungensfrequenz pi
d = 0:2*pi:4*pi;
%Pulszug: Pulslänge pi, Verschiebung pi/2
y = 2*(pulstran(t, d+pi/2, 'rectpuls', pi) -0.5);

%Fourier-Synthese mit N Oberschwingungen
%Anzahl der Oberschwingungen >=1
N = 3;
%Platz reservieren und auf Standard-Amplitude
%von 0 setzen
yF = zeros(size(t));


for n=-N+1:N
    %Fourier-Reihe mit Abbruch nach N-tem Summenglied
    %Laufindex: -N+1 bis N wegen Symmetrie zur y-Achse
    yF = yF + ((-2*j)/pi)*(exp(j*(2*n-1)*t)/(2*n-1));
end

%Zeichne Realteil von yF
yF = real(yF);

%Grafik & Beschriftung
plot(t, y, t, yF), grid
axis([0 4*pi -1.3 1.3])
xlabel('t \rightarrow')
ylabel('x(t), x_{F}(t) \rightarrow')
title(['Periodischer Rechteckimpuls mit ', num2str(N), '
Oberschwingung(en)'])
```

MATLAB-Code 3: PeriodischerReckteckimpuls_Linienspektrum

```
% A_3_PeriodischerReckteckimpuls_Linienspektrum
% A_3_PeriodischerRechteckimpuls_Linienspektrum.m * JK * 10/06/2018
% Zeichnet das zugehörige Linienspektrum für einen periodischen
% Rechteckimpuls
% und N Näherungen, angenähert mithilfe der Fourier-Reihe


%Fourier-Synthese mit N Oberschwingungen
%Anzahl der Oberschwingungen >=1
N = 5;
%Bereitstellen des Speicherplatzes der Koeffizienten
cN = zeros(1+2*N,1);
n=-N:1:N;
for r=-N+1:N+1
    %Fourier-Koeffizienten mit Abbruch nach N-tem Summenglied
    %Laufindex: -N+1 bis N wegen Symmetrie zur y-Achse
    %if-Anweisung für symmetrische Darstellung
    if r<1
        cN(r+N) = ((-2*j)/pi)*(1/(2*r-1));
        cN(r+N) = abs(cN(r+N));
    end
    if r==1
        cN(r+N) = 0;
    end
    if r>1
        cN(r+N) = ((-2*j)/pi)*(1/(2*(r-1)-1));
        cN(r+N) = abs(cN(r+N));
    end
end

%Grafik & Beschriftung
stem(n, cN, 'filled'), grid
axis([-7 7 -.1 1])
xlabel('n \rightarrow')
ylabel('|c_n| \rightarrow')
title(['Linienspektrum ', num2str(N), ' Oberschwingung(en)'])
```

N

MATLAB-Code 4: Rechteckimpuls

```
% B_1_Rechteckimpuls
% B_1_Rechteckimpuls.m * JK * 13/06/2018
% Zeichnet einen Rechteckimpuls mit der
% Pulsweite w

%Pulsbreite w
w = 2
%Samples
t = -2*w:.01:2*w;
%Pulszug: Pulslänge pi
y = rectpuls(t, w);

%Grafik & Beschriftung
plot(t, y), grid
axis([-w w -.1 1.1])
xlabel('t \rightarrow')
ylabel('x(t) \rightarrow')
xticks([-w/2 0 w/2])
xticklabels({'-w','0','w'})
yticks([0, 1])
yticklabels({'0','1',})
title('Rechteckimpuls')
```

MATLAB-Code 5: RechteckimpulsBildfunktion

```
% B_2_RechteckimpulsBildfunktion
% B_2_RechteckimpulsBildfunktion.m * JK * 13/06/2018
% Zeichnet die Bildfunktion zum Rechteckimpuls mit Pulsbreite w
% aus B_1_Rechteckimpuls.m und das zugehörige Amplitudenspektrum

%Pulsbreite w
w = 2
%Samples
t = -5*w:.01:5*w;
%Grenze s des Laufindex i
s = size(t);
s = s(2);

y=zeros(size(t));
for i=1:s
    if t(i)~=0
        y(i) = 2*w*(sin(w*t(i))/(w*t(i)));
    else
        if t(i)==0
        y(i) = 2*w;
        end
    end
end
%Amplitudenspektrum
ampl = abs(y);

%Grafik & Beschriftung
plot(t, y,':', t, ampl,'--', 'LineWidth',1.5), grid
axis([-5*w 5*w -1 2.5*w])
xlabel('\omega \rightarrow')
ylabel('X(\omega) bzw. A(\omega) \rightarrow')
xticks([0])
xticklabels({'0'})
yticks([0, 2*w])
yticklabels({'0','2w',})
title('Rechteckimpuls')
legend('Bildfunktion X(\omega)','Amplitudenspektrum A(\omega)')
```

P

MATLAB-CODE 6: BasisLaplace

```
% C_1_BasisLaplace
% C_1_BasisLaplace.m * JK * 17/06/2018
% Zeichnet die Basisfunktionen der
% Laplace-Transformation

%Samples
t = 0:.01:10;
%Kreisfrequenz
w = 2*pi*2;
%Faktor delta
d = .5;

%Basisfunktionen
harm = imag( exp(-j*w*t) );
env1 = exp(-d*t);
env2 = exp(0);
env3 = exp(d*t);


fkt1 = env1 .* harm;
fkt2 = env2 .* harm;
fkt3 = env3 .* harm;

%Graphics
FIG = figure( "Name", "Basisfunktionen Laplace-Transformation");
subplot(1,3,1), plot(t, fkt1)
axis([-.1 5 -.9 .9]);
xticks([])
yticks([])
xlabel('\delta > 0  t \rightarrow', 'FontSize', 13);
ylabel('e^{-\deltat}{\itIm}e^{-j\omegat} \rightarrow', 'FontSize', 13);

subplot(1,3,2), plot(t, fkt2)
axis([-.1 5 -1.1 1.1]);
xticks([])
yticks([])
xlabel('\delta = 0  t \rightarrow', 'FontSize', 13);
ylabel('e^{0}{\itIm}e^{-j\omegat} \rightarrow', 'FontSize', 13);

subplot(1,3,3), plot(t, fkt3)
axis([-.1 5 -10 10]);
xticks([])
yticks([])
xlabel('\delta < 0  t \rightarrow', 'FontSize', 13);
ylabel('e^{-\deltat}{\itIm}e^{-j\omegat} \rightarrow', 'FontSize', 13);
```

MATLAB-CODE 7: ExpSign_PoleZero

```
% D_1_ExpSign_PoleZero
% D_1_ExpSign_PoleZero.m * JK * 23/06/2018
% Zeichnet ein exponentiell fallendes Signal
% und das zugehörige Pol-Nullstellen-Diagramm
% der z-Übertragungsfunktion

%Samples
m = 0:1:12;
%Alpha
alpha = .65;

%Signal
x_m = alpha.^m;
%Nullstelle, Polstelle
z = 0;
p = alpha;

%Graphics
FIG = figure( "Name", "ExpSign_PoleZero");
subplot(1,2,1), stem(m, x_m, 'LineWidth', 2.5), grid
axis([0 max(m) -.1 1.1]);
title('exponentiell fallendes Signal x(m)')
yticks([])
xlabel('m \rightarrow');
ylabel('x(m) \rightarrow');

%zplane(z, p) zeichnet die händisch berechneten
%Pol- und Nullstellen in die komplexe Ebene
subplot(1,2,2), zplane(z, p)
axis([-1 1 -1 1]);
title('Pol-Nullstellen-Diagramm')
xticks([-1, 0, 1])
yticks([-1, 0, 1])
```

R

MATLAB-CODE 8: 1stOrderFeedForward_PoleZero

```
% E_1_1stOrderFeedForward_PoleZero
% E_1_1stOrderFeedForward_PoleZero.m * JK * 27/06/2018
% Zeichnet das zugehörige Pol-Nullstellen-Diagramm
% zum Feed-Forward-Filter erster Ordnung mit Variation vom
% Faktor Alpha

%Alpha
alpha = -1;

%Nullstelle, Polstelle
z = -alpha;
p = 0;

%Graphics
%zplane(z, p) zeichnet die händisch berechneten
%Pol- und Nullstellen in die komplexe Ebene
zplane(z, p)
%weiter in den gleichen Plot zeichnen
hold on;
zplane(.7*z, p)
zplane(.5*z, p)
axis([-1 1 -1 1]);
title('Pol-Nullstellen-Diagramm mit variablem \alpha<0')
xticks([-1, 0, 1])
yticks([-1, 0, 1])
```

MATLAB-CODE 9: 1stOrderFeedForward_FreqResponse

```
% E_2_1stOrderFeedForward_FreqResponse
% E_2_1stOrderFeedForward_FreqResponse.m * JK * 27/06/2018
% Zeichnet die zugehörige Frequenzantwort
% zum Feed-Forward-Filter erster Ordnung mit Variation des
% Faktors "Alpha"

%Alpha
alpha = -1;

Fs = 44100;     %Sampling-Frequenz
f = 50:50:22050; %Frequenzen zur Frequenzantwort

%z-Übertragungsfunktion
% X_z = (1+alpha*z^(-1))/1;
%Frequenzantwort
%freqz([Zählerkoeffizienten],Nennerkoeffizient,diskrete
%Frequenzen,Sampling-Frequenz);
[h1,f] = freqz([.9*alpha 1], 1, f, Fs);
[h2,f] = freqz([.7*alpha 1], 1, f, Fs);
[h3,f] = freqz([.5*alpha 1], 1, f, Fs);
[h4,f] = freqz([-.5*alpha 1], 1, f, Fs);
[h5,f] = freqz([-.7*alpha 1], 1, f, Fs);
[h6,f] = freqz([-.9*alpha 1], 1, f, Fs);

%Die Kurve mit der größten range wird auf 0:1 gestreckt, die anderen
%im Verhältnis anteilig
M=max([range(20*log10(abs(h1))) range(20*log10(abs(h2)))
range(20*log10(abs(h3))) range(20*log10(abs(h4))) range(20*log10(abs(h5)))
range(20*log10(abs(h6)))]);
h1dB = ((20*log10(abs(h1)))-max((20*log10(abs(h1))))) / M;
h2dB = ((20*log10(abs(h2)))-max((20*log10(abs(h2))))) / M;
h3dB = ((20*log10(abs(h3)))-max((20*log10(abs(h3))))) / M;
h4dB = ((20*log10(abs(h4)))-max((20*log10(abs(h4))))) / M;
h5dB = ((20*log10(abs(h5)))-max((20*log10(abs(h5))))) / M;
h6dB = ((20*log10(abs(h6)))-max((20*log10(abs(h6))))) / M;
h1dB = h1dB + 1;
h2dB = h2dB + 1;
h3dB = h3dB + 1;
h4dB = h4dB + 1;
h5dB = h5dB + 1;
h6dB = h6dB + 1;

%Graphics
hold on
plot(f,h1dB,f,h2dB,f,h3dB,f,h4dB,f,h5dB,f,h6dB,'LineWidth',2);
grid on
axis([0 22050 0 1])
legend({'\alpha=-.9','\alpha=-.7','\alpha=-
.5','\alpha=.5','\alpha=.7','\alpha=.9'},'FontSize',14,'Location','south')
xlabel('Frequenz (Hz) \rightarrow')
ylabel('normierter Betrag |{\itH(f)}|')
title('Frequenzantwort mit variablem \alpha', 'FontSize', 14)
xticks([0 22050])
xticklabels({'0','F_s/2'})
```

T

MATLAB-CODE 10: 1stOrderFeedBack_PoleZero

```
% E_3_1stOrderFeedBack_PoleZero
% E_3_1stOrderFeedBack_PoleZero.m * JK * 27/06/2018
% Zeichnet das zugehörige Pol-Nullstellen-Diagramm
% zum Feedback -Filter erster Ordnung mit Variation vom
% Faktor Alpha

%Alpha
alpha = 1;

%Nullstelle, Polstelle
p = alpha;
z = 0;

%Graphics
%zplane(z, p) zeichnet die händisch berechneten
%Pol- und Nullstellen in die komplexe Ebene
zplane(z, p)
%weiter in den gleichen Plot zeichnen
hold on;
zplane(z, .7*p)
zplane(z, .5*p)
axis([-1 1 -1 1]);
title('Pol-Nullstellen-Diagramm mit variablem \alpha>0')
xticks([-1, 0, 1])
yticks([-1, 0, 1])
```

MATLAB-CODE 11: 1stOrderFeedBack_FreqResponse

```
% E_4_1stOrderFeedback_FreqResponse
% E_4_1stOrderFeedback_FreqResponse.m * JK * 27/06/2018
% Zeichnet die zugehörige Frequenzantwort
% zum Feedback-Filter erster Ordnung mit Variation des
% Faktors "Alpha"

%Alpha
alpha = 1;

Fs = 44100;      %Sampling-Frequenz
f = 0:50:22050; %Frequenzen zur Frequenzantwort

%z-Übertragungsfunktion
% X_z = 1/(1-alpha*z^(-1));
%Frequenzantwort
%freqz([Zählerkoeffizienten],Nennerkoeffizient,diskrete
%Frequenzen,Sampling-Frequenz);
[h1,f] = freqz(1, [-.9*alpha 1], f, Fs);
[h2,f] = freqz(1, [-.75*alpha 1], f, Fs);
[h3,f] = freqz(1, [-.5*alpha 1], f, Fs);
[h4,f] = freqz(1, [.5*alpha 1], f, Fs);
[h5,f] = freqz(1, [.75*alpha 1], f, Fs);
[h6,f] = freqz(1, [.9*alpha 1], f, Fs);
%dB-Darstellung + Normierung auf 0 bis 1
h1dB = ((20*log10(abs(h1)))+abs(min((20*log10(abs(h1)))))) /
range(20*log10(abs(h1)));
h2dB = ((20*log10(abs(h2)))+abs(min((20*log10(abs(h2)))))) /
range(20*log10(abs(h2)));
h3dB = ((20*log10(abs(h3)))+abs(min((20*log10(abs(h3)))))) /
range(20*log10(abs(h3)));
h4dB = ((20*log10(abs(h4)))+abs(min((20*log10(abs(h4)))))) /
range(20*log10(abs(h4)));
h5dB = ((20*log10(abs(h5)))+abs(min((20*log10(abs(h5)))))) /
range(20*log10(abs(h5)));
h6dB = ((20*log10(abs(h6)))+abs(min((20*log10(abs(h6)))))) /
range(20*log10(abs(h6)));

%Graphics
hold on
plot(f,h1dB,f,h2dB,f,h3dB,f,h4dB,f,h5dB,f,h6dB,'LineWidth',2);
grid on
axis([0 22050 0 1])
legend({'\alpha=.9','\alpha=.75','\alpha=.5','\alpha=-.5','\alpha=-
.75','\alpha=-.9'},'FontSize',14,'Location','north')
xlabel('Frequenz (Hz) \rightarrow')
ylabel('normierter Betrag |{\itH(f)}|')
title('Frequenzantwort mit variablem \alpha', 'FontSize', 14)
xticks([0 22050])
xticklabels({'0','F_s/2'})
```

MATLAB-Code 12: 2ndOrderFeedForward_PoleZero

```
% E_5_2ndOrderFeedForward_PoleZero
% E_5_2ndOrderFeedForward_PoleZero.m * JK * 27/06/2018
% Zeichnet das zugehörige Pol-Nullstellen-Diagramm
% zum Feed-Forward-Filter zweiter Ordnung mit Variation vom
% Winkel phi bzw. des Radius r

%Winkel
phi1 = pi/4;
phi2 = pi/2;
phi3 = 3*pi/4;
r1 = 1;
r2 = .75;
r3 = .5;
%Nullstelle, Polstelle
p = 0;
z1 = r1*(cos(phi1)+j*sin(phi1));
z2 = r1*(cos(phi2)+j*sin(phi2));
z3 = r1*(cos(phi3)+j*sin(phi3));
z1C = conj(z1);
z2C = conj(z2);
z3C = conj(z3);
z4 = r1*z2;
z5 = r2*z2;
z6 = r3*z2;
z4C = conj(z4);
z5C = conj(z5);
z6C = conj(z6);
%Graphics
fig1=figure;
%zplane(z, p) zeichnet die händisch berechneten
%Pol- und Nullstellen in die komplexe Ebene
%weiter in den gleichen Plot zeichnen
hold on;
zplane(z1, p)
zplane(z1C, p)
zplane(z2, p)
zplane(z2C, p)
zplane(z3, p)
zplane(z3C, p)
axis([-1 1 -1 1]);
title('Pol-Nullstellen-Diagramm mit Variation von \phi')
xticks([-1, 0, 1])
yticks([-1, 0, 1])
fig2=figure;
hold on;
zplane(z4, p)
zplane(z4C, p)
zplane(z5, p)
zplane(z5C, p)
zplane(z6, p)
zplane(z6C, p)
axis([-1 1 -1 1]);
title('Pol-Nullstellen-Diagramm mit Variation von r')
xticks([-1, 0, 1])
yticks([-1, 0, 1])
```

MATLAB-Code 13: 2ndOrderFeedForward_FreqResponse

```
% E_6_2ndOrderFeedForward_FreqResponse
% E_6_2ndOrderFeedForward_FreqResponse.m * JK * 27/06/2018
% Zeichnet die zugehörige Frequenzantwort
% zum Feed-Forward-Filter zweiter Ordnung mit Variation des
% Winkels phi und des Radius r

%Verstärkungsfaktor G
g = 1;

%Winkel und Radius
phi1 = pi/4;
phi2 = pi/2;
phi3 = 3*pi/4;
r1 = 1;
r2 = .75;
r3 = .5;

Fs = 44100;      %Sampling-Frequenz
f = 50:50:22050; %Frequenzen zur Frequenzantwort

%z-Übertragungsfunktion
% X_z = G-2*G*r*cos(phi)*z^(-1)+G*r^2*z^(-2))
%Frequenzantwort
%freqz([Zählerkoeffizienten],Nennerkoeffizient,diskrete
%Frequenzen,Sampling-Frequenz);
%Variation von phi:
[h1,f] = freqz([g*r1^2 -2*g*r1*cos(phi1) g], 1, f, Fs);
[h2,f] = freqz([g*r1^2 -2*g*r1*cos(phi2) g], 1, f, Fs);
[h3,f] = freqz([g*r1^2 -2*g*r1*cos(phi3) g], 1, f, Fs);
%Variation von r:
[h4,f] = freqz([g*r1^2 -2*g*r1*cos(phi2) g], 1, f, Fs);
[h5,f] = freqz([g*r2^2 -2*g*r1*cos(phi2) g], 1, f, Fs);
[h6,f] = freqz([g*r3^2 -2*g*r1*cos(phi2) g], 1, f, Fs);

%dB-Darstellung + Normierung auf 0 bis 1
%verschiedene Normierngen für fig1 und fig2:
%fig1: jede Kurve wird auf den Bereich 0:1 gestreckt
%fig2: die Kurge mit der größten range wird auf 0:1 gestreckt, die anderen
%im Verhältnis anteilig
Mfig2=max([range(20*log10(abs(h4))) range(20*log10(abs(h5)))
range(20*log10(abs(h6)))]);

h1dB = ((20*log10(abs(h1)))+abs(min((20*log10(abs(h1)))))) /
range(20*log10(abs(h1)));
h2dB = ((20*log10(abs(h2)))+abs(min((20*log10(abs(h2)))))) /
range(20*log10(abs(h2)));
h3dB = ((20*log10(abs(h3)))+abs(min((20*log10(abs(h3)))))) /
range(20*log10(abs(h3)));
h4dB = ((20*log10(abs(h4)))-max((20*log10(abs(h4))))) / Mfig2;
h5dB = ((20*log10(abs(h5)))-max((20*log10(abs(h5))))) / Mfig2;
h6dB = ((20*log10(abs(h6)))-max((20*log10(abs(h6))))) / Mfig2;

h4dB = h4dB+1;
h5dB = h5dB+1;
h6dB = h6dB+1;

%Graphics
```

X

```
fig1 = figure;
plot(f,h1dB,f,h2dB,f,h3dB,'LineWidth',2);
grid on
axis([0 22050 0 1])
legend({'\phi=\pi/4','\phi=\pi/2','\phi=3\pi/4'},'FontSize',14,'Location','
northwest')
xlabel('Frequenz (Hz) \rightarrow')
ylabel('normierter Betrag |{\itH(f)}|')
title('Frequenzantwort mit Variation von \phi', 'FontSize', 14)
xticks([0 22050])
xticklabels({'0','F_s/2'})

fig2 = figure;
plot(f,h4dB,f,h5dB,f,h6dB,'LineWidth',2);
grid on
axis([0 22050 0 1])
legend({'r=1','r=.75','r=.5'},'FontSize',14,'Location','southwest')
xlabel('Frequenz (Hz) \rightarrow')
ylabel('normierter Betrag |{\itH(f)}|')
title('Frequenzantwort mit Variation von r', 'FontSize', 14)
xticks([0 22050])
xticklabels({'0','F_s/2'})
```

MATLAB-Code 14: 2ndOrderFeedBack_PoleZero

```
% E_7_2ndOrderFeedBack_PoleZero
% E_7_2ndOrderFeedBack_PoleZero.m * JK * 03/07/2018
% Zeichnet das zugehörige Pol-Nullstellen-Diagramm
% zum Feedback-Filter zweiter Ordnung mit Variation vom
% Winkel phi bzw. des Radius r

%Winkel
phi1 = pi/4;
phi2 = pi/2;
phi3 = 3*pi/4;
r1 = .95;
r2 = .75;
r3 = .5;
%Nullstelle, Polstelle
z = 0;
p1 = r1*(cos(phi1)+j*sin(phi1));
p2 = r1*(cos(phi2)+j*sin(phi2));
p3 = r1*(cos(phi3)+j*sin(phi3));
p1C = conj(p1);
p2C = conj(p2);
p3C = conj(p3);
p4 = r1*p2;
p5 = r2*p2;
p6 = r3*p2;
p4C = conj(p4);
p5C = conj(p5);
p6C = conj(p6);
%Graphics
fig1=figure;
%zplane(z, p) zeichnet die händisch berechneten
%Pol- und Nullstellen in die komplexe Ebene
%weiter in den gleichen Plot zeichnen
hold on;
zplane(z, p1)
zplane(z, p1C)
zplane(z, p2)
zplane(z, p2C)
zplane(z, p3)
zplane(z, p3C)
axis([-1 1 -1 1]);
title('Pol-Nullstellen-Diagramm mit Variation von \phi')
xticks([-1, 0, 1])
yticks([-1, 0, 1])
fig2=figure;
hold on;
zplane(z, p4)
zplane(z, p4C)
zplane(z, p5)
zplane(z, p5C)
zplane(z, p6)
zplane(z, p6C)
axis([-1 1 -1 1]);
title('Pol-Nullstellen-Diagramm mit Variation von r')
xticks([-1, 0, 1])
yticks([-1, 0, 1])
```

Z

MATLAB-Code 15: 2ndOrderFeedBack_FreqResponse

```
% E_8_2ndOrderFeedBack_FreqResponse
% E_8_2ndOrderFeedBack_FreqResponse.m * JK * 03/07/2018
% Zeichnet die zugehörige Frequenzantwort
% zum Feedback-Filter zweiter Ordnung mit Variation des
% Winkels phi und des Radius r

%Verstärkungsfaktor G
g = 1;

%Winkel und Radius
phi1 = pi/4;
phi2 = pi/2;
phi3 = 3*pi/4;
r1 = .95;
r2 = .75;
r3 = .5;

Fs = 44100;      %Sampling-Frequenz
f = 50:50:22050; %Frequenzen zur Frequenzantwort

%z-Übertragungsfunktion
% X_z = g/(1-2*r*cos(phi)*z^(-1)+r^2*z^(-1))
%Frequenzantwort
%freqz([Zählerkoeffizienten],Nennerkoeffizient,diskrete
%Frequenzen,Sampling-Frequenz);
%Variation von phi:
[h1,f] = freqz(g, [r1^2 -2*r1*cos(phi1) 1], f, Fs);
[h2,f] = freqz(g, [r1^2 -2*r1*cos(phi2) 1], f, Fs);
[h3,f] = freqz(g, [r1^2 -2*r1*cos(phi3) 1], f, Fs);
%Variation von r:
[h4,f] = freqz(g, [r1^2 -2*r1*cos(phi2) 1], f, Fs);
[h5,f] = freqz(g, [r2^2 -2*r1*cos(phi2) 1], f, Fs);
[h6,f] = freqz(g, [r3^2 -2*r1*cos(phi2) 1], f, Fs);

%dB-Darstellung + Normierung auf 0 bis 1
%verschiedene Normierngen für fig1 und fig2:
%fig1: jede Kurve wird auf den Bereich 0:1 gestreckt
%fig2: die Kurge mit der größten range wird auf 0:1 gestreckt, die anderen
%im Verhältnis anteilig
Mfig2=max([range(20*log10(abs(h4))) range(20*log10(abs(h5)))
range(20*log10(abs(h6)))]);

h1dB = ((20*log10(abs(h1)))+abs(min((20*log10(abs(h1)))))) /
range(20*log10(abs(h1)));
h2dB = ((20*log10(abs(h2)))+abs(min((20*log10(abs(h2)))))) /
range(20*log10(abs(h2)));
h3dB = ((20*log10(abs(h3)))+abs(min((20*log10(abs(h3)))))) /
range(20*log10(abs(h3)));
h4dB = ((20*log10(abs(h4)))-max((20*log10(abs(h4))))) / Mfig2;
h5dB = ((20*log10(abs(h5)))-max((20*log10(abs(h5))))) / Mfig2;
h6dB = ((20*log10(abs(h6)))-max((20*log10(abs(h6))))) / Mfig2;

h4dB = h4dB+1;
h5dB = h5dB+1;
h6dB = h6dB+1;

%Graphics
```

```
fig1 = figure;
plot(f,h1dB,f,h2dB,f,h3dB,'LineWidth',2);
grid on
axis([0 22050 0 1])
legend({'\phi=\pi/4','\phi=\pi/2','\phi=3\pi/4'},'FontSize',14,'Location','
southwest')
xlabel('Frequenz (Hz) \rightarrow')
ylabel('normierter Betrag |{\itH(f)}|')
title('Frequenzantwort mit Variation von \phi', 'FontSize', 14)
xticks([0 22050])
xticklabels({'0','F_s/2'})

fig2 = figure;
plot(f,h4dB,f,h5dB,f,h6dB,'LineWidth',2);
grid on
axis([0 22050 0 1])
legend({'r=.95','r=.75','r=.5'},'FontSize',14,'Location','west')
xlabel('Frequenz (Hz) \rightarrow')
ylabel('normierter Betrag |{\itH(f)}|')
title('Frequenzantwort mit Variation von r', 'FontSize', 14)
xticks([0 22050])
xticklabels({'0','F_s/2'})
```

MATLAB-Code 16: Filter_FreqResponse

```
% F_1_Filter_FreqResponse
% F_1_Filter_FreqResponse.m * JK * 05/07/2018
% Zeichnet die zugehörige Frequenzantwort zu typischen im Tonstudio
% angewandten Filtern

% Filter entwerfen
lp =
designfilt('lowpassfir','FilterOrder',1,'CutoffFrequency',1e3,'SampleRate',
44100);
hp =
designfilt('highpassfir','FilterOrder',1,'CutoffFrequency',17e3,'SampleRate
',44100);
bp =
designfilt('bandpassiir','FilterOrder',4,'HalfPowerFrequency1',13e3,'HalfPo
werFrequency2',15e3,'SampleRate',44100);
bs =
designfilt('bandstopiir','FilterOrder',4,'HalfPowerFrequency1',3e3,'HalfPow
erFrequency2',5e3,'SampleRate',44100);

fig1 = fvtool(lp,hp,bp,bs);
legend('Tiefpass','Hochpass','Bandpass','Bandstop','Location','south')
grid
```

MATLAB-Code 17: Fensterfunktionen

```
% G_1_Fensterfunktionen
% G_1_Fensterfunktionen.m * JK * 07/07/2018
% Zeichnet unterschiedliche Typen von Fensterfunktionen in Zeit- sowie
% Bildbereich

%Länge in Samples
L = 32;

% Reckteckfenster, Hamming-Fenster, Dreieckfenster,
% Blackman-Fenster zeichnen
wvtool(rectwin(L),hamming(L),triang(L),blackman(L));
```

MATLAB-Code 18: Tiefpass

```
% G_2_Tiefpass
% G_2_Tiefpass.m * JK * 07/07/2018
% Zeichnet Impulsantwort und Frequenzgang des Tiefpass-Filters aus der
% Beispielrechnung zum FIR-Filterentwurf

%Filterordnung
M = 100;
%Sampling-Frequenz
f_s = 44.1e3;
%Cut-Off-Frequenz
f_c = f_s/4;

m = 0:1:M;
f = 1:1:f_s/2;

%Impulsantwort
h_m = zeros(size(m));
for i=1:M+1
    h_m(i) = (sin(2*pi*(m(i)-M/2)*f_c/f_s))/(pi*(m(i)-M/2));
end
h_m(M/2+1) = 2*f_c/f_s;

%Frequenzantwort
H_f = fft(h_m);
AbsH_f = abs(H_f);

%Graphics
figure
subplot(1,2,1);
plot(m,h_m);
xlabel('Zeit (ms)');
ylabel('h(m)');
xlim([0 M]);
title('Impulsantwort');
grid

subplot(1,2,2);
%"Frequenz-Sample-Anzahl"
bin_values = 0 : M-1;
fAxis_Hz = bin_values*f_s/M;
%Einseitiges Spektrum
M_2 = ceil(M/2);
plot(fAxis_Hz(1:M_2), AbsH_f(1:M_2));
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('|H(f)|');
xlim([0 f_s/2]);
xticks([0 f_s/2]);
xticklabels({'0','F_s/2'});
title('Frequenzgang');
grid
```

Literaturverzeichnis

Dickreiter, Michael, Volker Dittel, Wolfgang Hoeg, und Martin Wöhr, . *Handbuch der Tonstudiotechnik.* 8., überarbeitete und erweiterte Auflage. Berlin: Walter de Gruyter GmbH, 2014.

Dössel, Olaf. *Vorlesungsskript zur Vorlesung Lineare Elektrische Netze.* Karlsruhe: Karlsruhe Institute of Technology, Institut für Biomedizinische Technik, 2011.

Furlan, Peter. *DAS GELBE RECHENBUCH 1.* Dortmund: Verlag Martina Furlan, 2008.

—. *DAS GELBE RECHENBUCH 3.* Dortmund: Verlag Martina Furlan, 2008.

MathWorks. *MATLAB Documentation.* 2018. https://de.mathworks.com/help/.

Merziger, Gerhard, und Thomas Wirth. *REPETITORIUM HÖHERE MATHEMATIK.* 6. Auflage. Hannover: Binomi Verlag, 2010.

Papula, Lothar. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler.* Bd. 2. 3 Bde. Wiesbaden: Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH, 2009.

Puente León, Fernando, Uwe Kiencke, und Holger Jäkel. *Signale und Systeme.* 5., überarbeitete Auflage. München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2011.

Vaseghi, Saeed V. *Multimedia Signal Processing : theory and applications in speech, music and communications.* Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd, 2007.

Werner, Martin. *Digitale Signalverarbeitung mit MATLAB.* 4. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH, 2009.

Wolfram Alpha - Lösung für g. 10. Juli 2018. https://www.wolframalpha.com/input/?i=g+%3D+0.5*(1%2B0.992901%5E2) (Zugriff am 10. Juli 2018).

Wolfram Alpha - Lösung für r. 10. Juli 2018. https://www.wolframalpha.com/input/?i=(0.25*(1%2Br%5E2)%5E2)*+abs((1%2Be%5E((-i*443*pi)%2F441))%2F(1%2Br%5E2*e%5E((-i*443*pi)%2F441)))%5E2+%3D+1%2F2,+r%3Dreal (Zugriff am 10. Juli 2018).

Zölzer, Udo. *Digitale Audiosignalverarbeitung.* 3. Auflage. Wiesbaden: B. G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, 2005.

FF

Anmerkungen: *Referenzierte, englischsprachige Quellen wurden durch den Autor übersetzt.*

Hochgestellte Fußnoten inkl. zugehöriger Referenz an Kapitelüberschriften beziehen sich auf das gesamte Unterkapitel.